APLICANDO EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES EM UM CONTEXTO INTERDISCIPLINAR: UM DIÁLOGO ENTRE A MATEMÁTICA E A QUÍMICA

[1] Alecio Soares Silva; [2]Carlos Rhamon Batista Morais; [3]Adailson Ribeiro da Silva; [4]Weslley Balbino Barros

Universidade Estadual da Paraíba; mataspe@hotmail.com; carlosrhamonmorais@gmail.com; adailsonribeiro1@gmail.com; weslleybarros02@gmail.com.

RESUMO: Em Química um dos caminhos utilizados no processo de balanceamento de equações, que representam uma reação química, o método algébrico, sugere a estratégia conhecida como tentativas em grande parte dos casos. Tal método consiste em descobrir o valor do coeficiente estequiométrico escolhendo arbitrariamente valores e verificando se são convenientes para tal balanceamento. O uso das tentativas no processo de balanceamento deixa a ideia da busca dos valores como um processo de adivinhação, no qual, a tarefa pode se tornar uma corrida a mercê da sorte, ou seja, a busca pelos coeficientes estequiométricos não está relacionada a um procedimento ou algoritmo pré-determinado, se caracteriza de maneira puramente baseada na aleatoriedade. É portanto, objetivo deste trabalho explorar uma ferramenta matemática que potencialize o uso do método algébrico no processo de balanceamento dessas equações que representam simbolicamente uma reação química, e esta ferramenta é um objeto matemático explorado em teoria dos números, conhecido como *Equações Diofantinas*. Por ter um caráter bibliográfico está fundamentado nos seguintes autores: Feltre (2004), Peruzzo (2006), Hefez (2010) e Oliveira (2010). Os resultados apontam que é possível aplicar conteúdos matemáticos de caráter abstrato de maneira significativa. Assim buscou-se uma forma de realizar uma aplicação interdisciplinar dialogando uma área específica da matemática com a disciplina de Química.

Palavras-Chave: Equações Diofantinas, Equações Químicas, Interdisciplinaridade.

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste Trabalho é dar uma pequena contribuição para o estudo de Equações Diofantinas, nesse sentido foi feita uma aplicação do Máximo Divisor Comum como uma ferramenta para resolver Equações Diofantinas Lineares e tais equações como mecanismo para balancear Equações Químicas. Sendo assim, buscou-se atingir os objetivos de apresentar uma proposta de estudo, mediante uma abordagem a algumas propriedades do conjunto dos números inteiros, bem como, uma aplicação do conteúdo na disciplina de Química, buscando encontrar uma contextualização, pois assim como pode ser visto nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, página 37, "Um primeiro passo, que pode ser produtivo e conduzir posteriormente à interdisciplinaridade sistêmica, é a abordagem simultânea de um mesmo assunto por diferentes disciplinas". Desta maneira, articular os conteúdos de forma que os alunos possam perceber uma utilidade prática para as Equações Diofantinas Lineares, bem como facilitar o processo de balanceamento de Equações Químicas pelo método algébrico.

Justifica-se esta proposta de trabalho lembrando de uma pergunta, muito frequente, durante a aula de matemática. Quando um aluno diz: ***“Professor, para que serve o conteúdo da aula de hoje?”.*** É indiscutível que tal pergunta não pode deixar de ser respondida de maneira convincente, pois, caso contrário, para que se ensina o conteúdo em discussão? Com certeza, uma aplicação de um conteúdo em uma situação cotidiana ou em outra área do conhecimento serve para motivar o aluno no que se refere a perceber o sentido do que se está aprendendo, todavia não esquecendo que o ensino de matemática tem como base a formação do pensamento. Desta maneira, os procedimentos metodológicos que nortearam este trabalho têm como caminho a pesquisa bibliográfica, tendo como base algumas obras sobre Aritmética e Álgebra, como também o uso de algumas obras sobre o ensino de química, direcionadas ao ensino médio ou superior. Em vista deste caminho, sugue uma proposta para o ensino-aprendizagem de um estudo sobre números inteiros, partindo da ideia de que o aprendizado se dá de maneira mais eficaz, quando o aluno consegue perceber o sentido e a importância dos conceitos matemáticos envolvidos em situações concretas.

METODOLOGIA

Na elaboração deste trabalho, realizou-se uma pesquisa de caráter bibliográfico, buscando elementos para sua fundamentação nos seguintes autores Feltre (2004), Peruzzo (2006), Hefez (2010) e Oliveira (2010). Atentou-se para que fosse feita uma aplicação do conteúdo contextualizando-o em outra área do conhecimento para denotar sua relevância.

1 NÚMEROS INTEIROS

Sabe-se que número natural é o resultado da operação de comparação entre uma grandeza e a unidade de medida. É fato que quando esta grandeza é discreta dizemos que a comparação é uma contagem e que o resultado desta é um número natural, assim, portanto, fica claro que a principal função dos números naturais está relacionada com o modelo de contagem. Ao falar-se de números naturais, incluímos o número zero como o primeiro deles, mesmo levando em consideração que a descoberta do zero se deu algum tempo depois do surgimento dos outros números naturais, ocorrendo pela necessidade de notar a não existência de unidades em uma ordem posicional.

A evolução do conhecimento humano, assim como o conhecimento sobre os números, ou também, dos conjuntos numéricos, ocorreu de modo a colaborar com as necessidades. Os números inteiros surgem quando os números naturais não são suficientes para representar um dado contexto, como, por exemplo, para atribuir um valor negativo. Os números inteiros se fazem presentes desde sempre em inúmeras situações do dia a dia, por exemplo, medir temperaturas, marcar as horas, dentre outras.

1.1 MULTIPLICIDADE E DIVISIBILIDADE EM $\mathbb{Z}$

Inicia-se esta seção definindo-se múltiplos, divisores e mostrando o algoritmo de Euclides além de definir máximo divisor comum, segundo Hefez (2011).

Definição 1. Dado um número inteiro m, os múltiplos de m são os números inteiros:

$$0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, \ldots$$

Definidos assim, percebe-se facilmente que vale a seguinte propriedade:

Proposição 1. Se a, b são números inteiros tais que ambos são múltiplos de $m \in \mathbb{Z}$, então $a + b$ e $a \cdot b$ são múltiplos de m.

Demonstração. De fato, supondo que $a = qm$ e $b = km$, com $q, k \in \mathbb{Z}$, daí segue que: $a + b = qm + km = (q + k)m$ e $a \cdot b = qm \cdot km = (qkm)m$.

Definição 2. Dados a, b inteiros, dizemos que a divide b e escrevemos $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$, tal que $b = ac$. Ao número c se dá o nome de quociente de a e b.

Proposição 2. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

i) $1|a$ e $a|a$;

ii) $a|0$;

iii) Se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$;

iv) Se $a|b$ e $b|a$, com $a \cdot b > 0$ então $a = b$;

v) Supondo que $a \neq 0$ e c$\neq 0$ e que $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$.

vi) Seja $a \neq 0$, se $a|(b + c)$, então $a|b$ implica em $a|c$;

vii) Se $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, tais que $a|b$ e $a|c$, então $a|(xb \pm yc)$.

Demonstração. i) $a = a|1$. O que justifica os dois casos.

ii) $0 = a \cdot 0$.

iii) Como $a|b$ e $b|c$, existem $m; n \in \mathbb{Z}$ tais que $a \cdot m = b$ e $b \cdot n = c$. Substituindo o valor de b em $b \cdot n = c$ temos, $c = (a \cdot m) \cdot n = a(mn)$ implicando em $a|c$.

iv) sabe-se que se $a|b$, então existe, $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot c = b$ e que $b|a$ então existe $d \in \mathbb{Z}$, tal que $b \cdot d = a$. Se a = 0 então $b = 0$, pois por hipótese $a|b$ e $b|a$. Caso $a \neq 0$, tem-se que $c >$ 0 e d > 0. Como $ac = b$ e $bd = a$, é possível substituir o valor de b da primeira igualdade na segunda e teremos $(ac)d = a$, ou seja, $a(cd) = a$. Assim $c = d = 1$. Logo $a = b$.

v) Como $a|b$ e $c|d$ é fato que existem $e, f \in \mathbb{Z}$, tais que $ae = b$ e $c f = d$. Multiplicando as duas igualdades temos que $(ae)(c f) = bd$, logo $(ac)(e f) = bd$. Portanto $(ac)|(bd)$.

vi) Como $a|(b + c)$, é fato que existe d tal que $ad = b + c$. Como $a|b$, é fato que existe e tal que $ae = b$. Substituindo o valor de b da segunda igualdade na primeira tem-se que $ae + c = ad$. Portanto $c = ad - ae$ implicando que $c = a(d - e)$. Isto é, $a|c$. De maneira análoga tem-se que $a|(b + c)$, isto é, existe d tal que $ad = b + c$. Como $a|c$, é fato que existe f, tal que, $a f = c$. Substituindo o valor de c da segunda igualdade na primeira tem-se que $af + b = ad$. Portanto, $b = ad - af$, implicando em $c = a(d - e)$. Isto é $a|b$.

vii) Como $a|b$ e $a|c$ é fato que existem e e $f \in \mathbb{Z}$, tais que $ae = b$ e $af = c$. Assim, segue que:

$$xb \pm yc = x(ae) \pm y(a f) = a(ex \pm y f).$$

O que conclui a prova.

1.2 ALGORITMO DA DIVISÃO

A divisão de dois números inteiros pode ser realizada, mesmo quando um destes números não é múltiplo do outro, para isso se faz a apresentação e demonstração do conhecido Algoritmo de Euclides da divisão, além de se fazer algumas aplicações deste importante resultado. Restringe-se aqui o Algoritmo de Euclides para o caso em que $m \in \mathbb{Z}_+^*$, pois sem perda de generalidade pode-se supor que se $n \in \mathbb{Z}_+^*$ e $m \in \mathbb{Z}_-^*$, o resultado da divisão de n por m a divisão de $-n$ por $-m$.

Teorema 1. *(Algoritmo da divisão de Euclides restrito ao caso m inteiro e positivo)*

Dados $m \in \mathbb{Z}_+^*$ e $n \in \mathbb{Z}$. Únicos inteiros q e r tais que $n = mq + r$, com $0 \leq r < m$.

Demonstração. Inicialmente precisa-se mostrar a existência de q e r, em seguida mostrar suas unicidades. Tem-se que n é um múltiplo de m ou então n está situado entre dois múltiplos qm e $(q + 1)m$ de m, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Se n é múltiplo de m, digamos, $n = mk$, trivialmente temos $q = k$ e $r = 0$. Caso n não seja múltiplo de m, é fato que teremos, $qm < n < (q + 1)m$. Nesta desigualdade pode-se subtrair qm de todos os membros, tendo assim, $0 < n - qm < m$.

Tomando $n - qm = r$ isso implica em $n = mq + r$, daí $0 < r < m$. Segue que, quando $r = 0$, n é múltiplo de m. Para provar a unicidade de q e r, suponhe-se que existam outros inteiros r' e q' tais que $n = mq' + r'$, com $0 \leq r' < n$. Desta forma, tem-se $n = mq + r = mq' + r'$, ou seja, $(r - r') = (q - q')m$, percebe-se assim que $(r - r')$ é múltiplo de m, e como $-m < r - r' < m$, o único valor possível é $r - r' = 0$, mas assim tem-se, $r = r'$. Desta forma, $q = q'$.

Exemplo 1. O quociente e o resto da divisão de 17 por 5, usando o Algoritmo de Euclides é obtido fazendo.

$$17 - 5 = 12{,}17 - 2 \cdot 5 = 7{,}17 - 3 \cdot 5 = 2 < 5$$

Portanto o quociente desta divisão é 3 e o resto é 2.

1.3 MÁXIMO DIVISOR COMUM

É possível Aplicar o Algoritmo da divisão para determinar o Máximo Divisor Comum de números inteiros.

Definição 3. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, diz-se que $d \in \mathbb{Z}_+^*$ é divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Definição 4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, diz-se que $d \in \mathbb{Z}_+^*$ é Máximo Divisor Comum de a e b, quando d cumpre duas condições.

(i) $d|a$ e $d|b$;

(ii) Se $e \in \mathbb{Z}$, tal que $e|a$ e $e|b$, então $e|d$, ou seja, d é o maior divisor comum de a e b.

Proposição 3. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ e $d = mdc(a, b)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) Se $a = b = 0$, então $d = 0$;

(ii) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $d = |b|$, já que $d \in \mathbb{Z}_+^*$;

(iii) Se $d = mdc(a, b)$, então $d = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b)$.

Demonstração. i) e ii) são triviais;

iii) Tem-se que o maior divisor de a é $|a|$. Daí, o maior divisor de $-a$ é $|a|$. Dessa forma, $mdc(a, b) = mdc(-a, b)$ e analogamente $mdc(a, -b) = mdc(-a, -b) = mdc(a, b)$.

Lema 1. (*Lema de Euclides*) Dados $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ tais que, $a = bq + r$, então $d = mdc(a, b)$ se, e somente se, $d = mdc(b, r)$.

Demonstração. Supondo que $d = mdc(a, b)$ desta forma, tem-se, por definição que $d > 0$, $d|a$ e $d|b$. Daí $dj(a - bq)$, isto é, $d|r$. Agora seja $d' \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $d'|b$ e $d'|r$. Assim $d'|(bq + r)$, ou seja, $d'|a$, logo $d'|d$, pois $d = mdc(a, b)$. Reciprocamente, supondo que $d = mdc(b, r)$. Daí $d|b$ e $d|r$, então $d|(bq + r)$, ou seja, $d|a$. Seja $f \in \mathbb{Z}$ tal que f ja e $f\ |b$, então $f\ |(a - bq)$, isto é, $f|r$. Logo $f|d'$, pois $d' = mdc(b, r)$. Donde se conclui que $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

Proposição 4. (*Identidade de Bezout*). O máximo divisor comum de dois inteiros a e b, não nulos simultaneamente, se escreve como combinação linear de a e b, ou seja, existem inteiros x e y tais que $mdc(a, b) = ax + by$.

Demonstração. Aplicando **Proposição 3. (iii),** sem perda de generalidade, pode-se supor que a > 0 e b > 0. Tome-se o conjunto:

$$A = \{ax + by, x, y \in \mathbb{Z}\},$$

Nota-se facilmente que existem elementos estritamente positivos em A, já que $a \in A$, basta tomar $x = 1$ e $y = 0$ e $b \in A$ e $x = 0$ e $y = 1$. Seja d o menor dos elementos positivos de A. Mostraremos que d é o máximo divisor comum entre a e b. É fato que $d > 0$. Como $d \in A$, então existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, de maneira que $d = a\,x_0 + by_0$. Aplicando o algoritmo da divisão aos números a e d segue que:

$$a = dk + r, 0 \leq r < a.$$

Das duas últimas igualdades tira-se $a = (a\,x_0 + by_0.)k + r$. Ou ainda podemos concluir que $r = a(1 - kx_0) + b(-y_0)k$. Portanto, $r \in A$. Sendo r positivo e levando em conta a escolha do d a conclusão é que $r = 0$. Daí $a = dk$, o que mostra que $d|a$. A prova que $d|b$ é análoga. Para finalizar tem-se que se $d'|a$ e $d'|b$, então, pelo fato de $d = a\,x_0 + by_0$, $d'|d$.

Proposição 5. Sejam os números inteiros a, b, c, d, d' com d e d' positivos. Se $d = mdc(a, b)$ e $d' = mdc(a, b, c)$, então $d' = mdc(mdc(a, b), c) = mdc(d, c)$.

Demonstração. Seja $d' = mdc(a, b, c)$ e $d'' = mdc(d, c)$, com $d = mdc(a, b)$. Quer se mostra que $d'|d''$ e $d''|d'$. Daí, como d' e d'' são positivos por definição, então $d' = d''$. De $d' = mdc(a, b, c)$ segue por definição, que $d'|a$ e $d'|b$, e como $d = mdc(a, b)$ então $d'|d$, pelo fato de $d'|c$ segue que $d'|d''$, pois $d'' = mdc(d, c)$. Por outro lado, $d'' = mdc(d, c)$ por definição, $d''|d$ e $d''|c$. Agora como $d = mdc(a, b)$, por definição $d|a$ e $d|b$, daí segue que $d''|a$ e $d''|b$, mas $d''|c$ logo $d''|d'$, pois $d' = mdc(a, b, c)$. Donde conclui-se que $d'' = d'$.

2 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM UMA INCÓGNITA

Uma Equação Diofantina Linear com Uma Incógnita é uma equação polinomial do primeiro grau com uma indeterminada, cujos coeficientes são números inteiros e suas soluções são números inteiros. Se existe solução inteira para este tipo de Equação Diofantina Linear, tal solução é única. Assim, para $ax = b$, segue que, caso exista um valor inteiro de x tal que esta sentença seja verdadeira, ele é único.

Proposição 6. A equação $ax = b$, possui solução inteira se, e somente se, $a|b$.

Demonstração. Supondo que $a|b$. Logo existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $ak = b$. Consequentemente, k é solução inteira da equação $ax = b$. Reciprocamente a equação $ax = b$ possui solução inteira, digamos $m \in \mathbb{Z}$, daí, $am = b$, logo $a|b$. Para mostrar que se a equação $ax = b$ possui solução ela é única. Supõe-se que x e x' sejam as soluções da equação. Logo $ax = b = ax_0$, daí $ax = ax'$, pode-se notar que $a = 0$, pois ax é um polinômio do primeiro grau, logo pela lei do cancelamento em $\mathbb{Z}$ segue que $x = x'$.

2.1 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS VARIÁVEIS

Uma Equação Diofantina Linear com duas variáveis é uma equação do tipo:

$$ax + by = c,$$

na qual $a, b, c \in \mathbb{Z}$, não sendo a e b nulos simultaneamente. Diz-se que uma das soluções de uma equação deste tipo é um par $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, tais que $a\,x_0 + by_0 = c$.

Definição 5. Chama-se de x_0, y_0 uma solução particular da equação $ax + by = c$, esta solução particular é um par de números inteiros que torna a sentença $a\,x_0 + by_0 = c$ verdadeira.

Proposição 7. Dada uma Equação Diofantina Linear $ax + by = c$, tal equação possui solução se, e somente se, $d|c$, com $d = mdc(a, b)$.

Demonstração. Supondo que a equação $ax + by = c$ possua solução do tipo (x_0, y_0). É necessário mostrar que $d|c$. Sendo $d = mdc(a, b)$, desta forma sabemos que, $d|a$ e $d|b$. Logo pela **Proposição 2**, $d|(a\,x_0 + by_0)$, ou seja, $d|c$. Reciprocamente, supondo que $d|c$ existe o inteiro k, tal que $c = dk$ e como $d = mdc(a,b)$ então, pela *Identidade de Bezout*, existem os inteiros x_0, y_0, tais que $a\,x_0 + by_0 = d$. Logo, $k(a\,x_0 + by_0) = kd = c$implicando em $ak\,x_0 + bky_0 = c$, implicando, desta forma, que $(kx_0, ky_0) \in$ é solução da equação $ax + by = c$.

Teorema 3. Se a Equação Diofantina Linear $ax + by = c$, possui uma solução do tipo $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, então possui infinitas soluções do tipo $\left(x = x_0 + \frac{b}{d}t, y = y_0 - \frac{a}{d}t\right) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{Z}$, para cada valor arbitrário do parâmetro t, com $d = mdc(a,b)$.

Demonstração. Sejam (x_0, y_0) uma solução particular e (x_k, y_k)uma solução qualquer da equação $ax + by = c$. Segue que $a\,x_0 + by_0 = c = ax_k + b\,y_k$. Assim, $a\,x_0 + by_0 = ax_k + b\,y_k$. Subtraindo $a\,x_0$ de ambos os lados temos, $by_0 = c = ax_k + b\,y_k - a\,x_0$. Subtraindo byk de ambos os lados da igualdade tem-se que $a(x_k - x_0) = b(y_0 - y_k)$. Como $d|a$ e $d|b$, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, tais que $a = pd$ e $b = qd$, com $mdc(p,q) = 1$. Isto diz que, $p(x_k - x_0) = q(y_0 - y_k)$. Percebe-se então que $p|q(y_0 - y_k)$, como $mdc(p,q) = 1$segue que $p|(y_0 - y_k)$, pois p e q são primos entre si, logo existe $\in \mathbb{Z}$, tal que $(y_0 - y_k) = pt$. Daí $(y_0 - y_k) = pt$ implica em $y_k = y_0 + pt$, mas $p = \frac{a}{d}$, logo, $y_k = y_0 + \frac{a}{d}t$.

Agora observa-seque $(y_0 - y_k) = pt$ implica em, $q(y_0 - y_k), = qpt = p(x_k - x_0)$, cancelando o fator p nos dois últimos membros da igualdade tem-se, $qt = (x_k - x_0)$ implicando em $x_k = x_0 - qt$, porém como $q = \frac{b}{d}$, tem-se $x_k = x_0 - \frac{b}{d}t$.

2.2 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM TRÊS VARIÁVEIS

Uma Equação Diofantina Linear é uma equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = n,$$

na qual a_1, a_2, a_3, n são números inteiros sendo a_1, a_2, a_3não nulos simultaneamente.

Proposição 8. A Equação Diofantina Linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = n$, possui solução se, e somente se, $d|n$, com $d = mdc(a_1, a_2, a_3)$.

Demonstração. Supõe-se que $(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0})$ seja solução, isto é, Sendo $a_1x_{1_0} + a_2x_{2_0} + a_3x_{3_0} = n$, sendo $d = mdc(a_1, a_2, a_3)$,

então por definição $d|a$, $d|b$ e $d|c$. Logo $d|a_1x_{1_0} + a_2x_{2_0} + a_3x_{3_0} = n$. Reciprocamente, se $d|n$ com $d = mdc(a_1, a_2, a_3)$, pela identidade de Bezout, existem inteiros r, s, t tais que $ar + bs +$

$ct = d$. Agora como $d|n$, existe inteiro q tal que $n = dq$. Daí, $arq + bsq + czq = n$. Logo (rk, sk, tk) é uma solução da equação $a_1x_{1_0} + a_2x_{2_0} + a_3x_{3_0} = n$.

Teorema 4. Se a Equação Diofantina Linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = n$, possui solução, então ela possui infinitas soluções inteiras do tipo $x_1 = x_{1_0} + \frac{b}{d'}t_1, x_2 = x_{2_0} - \frac{a}{d'}t_1, x_3 = x_{3_0} - t$, com $d' = mdc(a_1, a_2)$, $t, t_1 \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Chamando $a_1x_1 + a_2x_2$ de q, tem-se que $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = n$ equivale a $q + a_3x_3 = n$. É fato que $q + a_3x_3 = n$ possui solução (q_0, x_{3_0}) pois, $mdc(1, a_3) = 1$. A solução geral desta equação será, $(q_0 + a_3t;\ x_{3_0} - t)$, com $t \in \mathbb{Z}$. Logo temos, $a_1x_1 + a_2x_2 = q = q_0 + a_3t$. Então $a_1x_1 + a_2x_2 = q = q_0 + a_3t$. Escolhendo $t \in \mathbb{Z}$, digamos t_1 tal que $d|q_0 + a_3t_1$. Daí a equação $a_1x_1 + a_2x_2 = q_0 + a_3t_1$ possui solução, digamos (x_{1_0}, x_{2_0}). E, portanto possui solução geral do tipo $x_1 = x_{1_0} + \frac{b}{d'}t, x_2 = x_{2_0} - \frac{a}{d'}t, x_1 = x_{1_0} + \frac{b}{d'}t, x_2 = x_{2_0} - \frac{a}{d'}t$, com $d' = mdc(a_1, a_2)$, $t_1 \in \mathbb{Z}$.

3 APLICAÇÃO (USO EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COMO FERRAMENTA NO BALANCEAMENTO DE EQUAÇÕES QUÍMICAS)

Uma equação química é uma forma simbólica de representar abreviadamente uma reação ou um fenômeno químico, por exemplo, na reação de decomposição da amônia, na qual ocorre a formação de dióxido de nitrogênio e a liberação de água.

$$NH_4NO_3 \longrightarrow N_2O + H_2O$$

Nesta representação, as substâncias que aparecem no primeiro membro (antes da seta) são chamadas de reagentes e as substâncias que aparecem no segundo membro (depois da seta) são chamadas de produtos, Feltre (2004). A estequiometria é o ramo da química que estuda as quantidades envolvidas de cada substância em uma equação química. Em cálculos estequiométricos calculam-se as quantidades mensuráveis de reagentes e de produtos envolvidos em uma reação química. Tais cálculos estequiométricos baseiam-se em três leis que definem as reações químicas, como pode ser visto em Peruzzo(2006).

A primeira delas é a lei de conservação das massas, proposta pelo Francês Antoine Laurent Lavoisier, a qual afirma que a soma das massas de todos os reagentes de uma equação química é igual à soma das massas de todos os produtos. A segunda, é a lei das proporções definidas, que diz que as massas dos produtos de uma reação química se relacionam de forma proporcional com as massas dos reagentes desta mesma reação. Assim caso tenhamos 10 gramas de uma substância A reagindo com 12 gramas de uma substância B para formar 22 gramas de uma substância C, então 5 gramas da substância A reagem com 6 gramas da substância B para formar 11 gramas da substância C. A terceira, é a lei da proporção atômica, que afirma que os coeficientes estequiométricos são proporcionais a quantidade de átomos em cada molécula tanto nos reagentes quanto nos produtos de uma reação química.

Assim, por exemplo, são necessárias três moléculas de uma substância que possui dois átomos de um elemento químico, para formar duas moléculas de uma substância que possui dois átomos do mesmo elemento, como por exemplo, três moléculas do gás oxigênio (O2) reagindo para formar duas moléculas do gás ozônio (O_3). As quantidades de moléculas de cada substância envolvida em uma equação química são representadas por um número chamado de coeficiente estequiométrico ou simplesmente coeficiente. Diz-se que uma equação química está balanceada quando a quantidade total de átomos de cada elemento em seus primeiro e segundo membros é igual, contudo é necessário que os coeficientes estequiométricos sejam os menores números inteiros positivos possíveis. Para balancear uma equação química pode-se utilizar o método chamado de método algébrico, que consiste em representar as equações químicas por um conjunto de equações, onde as variáveis são os coeficientes estequiométricos.

Exemplo 3. Balancear a seguinte equação química: $NH_4NO_3 \longrightarrow N_2O + H_2O$.

Solução: Podemos chamar os coeficientes estequiométricos de x;y, e z. Assim teremos:

$$xNH_4NO_3 \longrightarrow yN_2O + zH_2O \; .$$

Usando o método algébrico e baseando-se na lei da proporção atômica, deve-se igualar a quantidade de átomos de cada elemento. Assim, $2x = 2y$, balanceando os átomos de nitrogênio, $4x = 2z$, balanceando os átomos de hidrogênio e $3x = y + z$, balanceando os átomos de oxigênio. Resolvendo este sistema de equações, que é possível e indeterminado, temos $2x - z = 0$, ou seja, balancear esta equação química equivale a encontrar as menores soluções inteiras positivas da Equação Diofantina $2x - z = 0$. E tal equação possui solução já que $mdc(2, -1) = mdc(2, 1) = 1$ e $1|0$, portanto, uma solução é $x = 1$ e $z = 2$, de modo que $y = 1$.

E a equação balanceada é:

$$NH_4NO_3 \longrightarrow N_2O + 2H_2O.$$

(83) 3322.3222
contato@conapesc.com.br
www.conapesc.com.br

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente o ensino de matemática em escolas da educação básica tem sido caracterizado como “bicho papão” pelos alunos, pois muitas vezes não é estabelecida uma relação entre o conhecimento trabalhado em sala de aula e a realidade vivida por eles, tornando o conhecimento matemático meramente abstrato e, portanto, dificilmente alcançável. Pensando nesse tipo de situação, foi buscada neste trabalho uma proposta de estudo que teve como foco aplicar o MDC na resolução de Equações Diofantinas Lineares. Mostrou-se uma aplicação destas equações no balanceamento de equações químicas, para que o conteúdo trabalhado pudesse ser visto pelos alunos como uma ferramenta útil na resolução de problemas, em outra área do conhecimento, como sugerem as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, página 7, quando propõe que a organização curricular deve ocorrer com “integração e articulação dos conhecimentos em processo permanente de interdisciplinaridade e contextualização”. Sendo assim, buscou-se fazer com que o conhecimento matemático pudesse ser encarado pelos alunos como algo que tem sentido, pois eles conseguem com essa relação de contextualização perceber seu significado.

Para fundamentar este trabalho foi feito um estudo sobre algumas propriedades aritméticas relativas a números inteiros, dentre as quais o conhecido Algoritmo de Euclides, calculou-se o Máximo Divisor Comum como uma aplicação do Algoritmo Euclidiano, chegando a um importante resultado usado como base nas resoluções de Equações Diofantinas Lineares. Daí foram sugeridos caminhos para resolução de Equações Diofantinas Lineares com duas variáveis e três variáveis. Por fim, foi feita uma aplicação do conteúdo na disciplina de Química visando, simplificar o processo de balanceamento de uma equação química método algébrico.

Desta maneira, chegou-se a conclusão de que o Algoritmo de Euclides tanto pode servir como ferramenta para o cálculo do Máximo Divisor Comum de números inteiros, como também tem consequências teóricas muito importantes que podem ser exploradas de muitas formas, tais como, buscando alcançar uma contextualização em outra área do conhecimento que ajude a dar sentido no porquê estudar este conteúdo, e assim motive os alunos.

Finalmente conclui-se dizendo que este trabalho pode ser utilizado por professores de Matemática e Química do Ensino básico, com a intenção de atingir seus objetivos, mesmo sabendo que as relações interdisciplinares e contextuais entre o conteúdo estudado e outras áreas do conhecimento, ainda podem ser abordadas de outras maneiras, usando outros procedimentos. Procurou-se dar uma pequena contribuição para melhorar a qualidade da educação básica, no que se refere à direção de interdisciplinaridade, tornando o ensino de matemática um processo significativo.

5 REFERÊNCIAS

1. BRASIL; MEC, SEB; Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília: MEC. SEB, 2008.

2. EVES, Howard; Introdução a história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues: Editora UNICAMP, Campinas-SP, 2004.

3. FELTRE, Ricardo; Química/Ricardo Feltre. Volume 1, 6a Ed. Editora Moderna, São Paulo, 2004.

4. HEFEZ, Abramo; Elementos de Aritmética. . SBM, Rio de Janeiro, 2011.

5. OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; Iniciação a matemática: um cursos com problemas e soluções/ Krerley Irraciel Martins Oliveira, Adán Corcho Fernández-2a Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2010.

6. PERUZZO, Francisco Miragaia; Química na abordagem do cotidiano. 4a edição. Editora Moderna, São Paulo, 2006.