# UMA ANÁLISE VETORIAL NA FLUIDOSTÁTICA: DEDUÇÃO DO TEOREMA DE STEVEN A PARTIR DA EQUAÇÃO DE EULER

Autor (Byanca Jaqueline Sousa Amorim); Co-autor (Halan Douglas Almeida Braga); Co-autor (Josué dos Anjos Silva); Orientador (João Paulo da Silva Alves)

*Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Pará – Campus Bragança byamorim02@gmail.com, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Pará – Campus Bragança, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Pará – Campus Bragança josue-juka@hotmail.com, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Pará – Campus Belém joaopaulocasimir@gmail.com*

## INTRODUÇÃO

Este estudo dar-se por uma análise vetorial do conteúdo da Grande área da Física intitulado Fluidodinâmica, e para que este seja efetuado necessita-se de uma breve compreensão dos seguintes temas: Gradiente, Divergente, Fluidodinâmica, Leis da conservação da natureza e Equação de Euler, afim de obter-se os conhecimentos necessários para que possa-se trabalhar de forma á integralizar ambos. Gradiente é o produto de um operador (∇(O símbolo ∇ é um delta invertido. (Esse símbolo costuma ser lido como "del", ou então "nabla", que vem a ser o nome de uma antiga harpa de 10 cordas desse formato.) (ANTON *et al*, 2007), o Operador Nabla é um operador diferencial vetorial que age em funções, dado por: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$)) com uma função escalar, representando as taxas de variação, obtendo os máximos e mínimos da mesma, definida por:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Já o Divergente é definido através do produto escalar, entre dois vetores - Operador Nabla e função vetorial - resultando em um valor escalar. Definido por:

$$\nabla \cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(f_1\hat{\imath} + f_2\hat{\jmath} + f_3\hat{k}\right)$$

Resultando em:

$$\nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)$$

Fluidostática é o estudo dos fluidos em estado de repouso, onde fluido é Qualquer coisa capaz de escoar ou fluir, em particular, qualquer líquido ou gás.(HEWITT,2011).

Segundo Rogers:

> A fluid is any material that flows in response to an applied force; thus, both liquids and gases are fluids. Some arrangements of solids can also exhibit fluid-like behaviors; granular systems (such as soil) can respond to forces, like those induced by earthquakes or floods,

with a flow-like shift in the arrangement of solid particles and the air or liquids that fill the spaces between them. Fluid physicists seek to better understand the physical principles governing fluids, including how fluids flow under the influence of energy, such as heat or electricity; how particles and gas bubbles suspended in a fluid interact with and change the properties of the fluid; how fluids interact with solid boundaries; and how fluids change phase, either from fluid to solid or from one fluid phase to another. Fluid phenomena studied range in scale from microscopic to atmospheric and include everything from the transport of cells in the human body to changes in the composition of the atmosphere. (ROGERS, 1997, pág. 28 e 29).

Leis da conservação da natureza: Massa, Momento linear e Momento angular. Massa segundo HEWITT (2011) é a quantidade de matéria de um objeto; a medida da inércia que um objeto apresenta em resposta a qualquer esforço realizado para iniciar seu movimento, para-lo ou alterar de qualquer maneira seu estado de movimento; uma forma de energia. Momento linear ou Momentum é o produto da massa do objeto com a velocidade a ele disposta, resultando em uma quantidade vetorial, ou seja, possui módulo, direção e sentido. Já o Momento angular oferece o produto inercial rotacional de um objeto para com sua velocidade de rotação que circunda um certo eixo.

Para que possa-se entender a Equação de Euler que é a Equação análoga a de Newton para a mecânica dos sólidos. Partindo da equação da Força Resultante de Newton temos:

$$F_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d(\rho V\vec{v})}{dt} = V\frac{d(\rho\vec{v})}{dt} + (\rho\vec{v})\frac{dV}{dt}$$

Para estudos convencionais, V é uma constante, portanto $\frac{dV}{dt} = 0$ , assim temos:

$$F_r = V\frac{d(\rho\vec{v})}{dt}$$
$$\frac{F_r}{V} = \frac{d(\rho\vec{v})}{dt}$$
$$\vec{f}_R = \frac{d\vec{j}}{dt}$$
$$\overrightarrow{f_{externo}} + \overrightarrow{f_{interno}} = \frac{d\vec{j}}{dt}$$

Onde $\vec{f}_R$ é a densidade volumétrica de força e $\vec{j}$ a densidade de velocidade do fluido, demonstrando que esta equação (Euler) foi ocasionada a partir da conservação do momento linear. Onde $\overrightarrow{f_{externo}}$ é dada por:

$$\overrightarrow{f_{externo}} = -\nabla P$$

Sendo P a pressão exercida em um fluido devido a força externa. Partindo desta premissa obteremos a Equação de Euler modificada I, segundo NUSSENZVEIG (2013) descrita como:

$$\overrightarrow{f_{externo}} - \nabla P = \frac{d\vec{J}}{dt} \quad \text{Ou} \quad \overrightarrow{f_{externo}} - \nabla P = \frac{d(\rho\vec{v})}{dt}$$

Será aplicado na equação acima um dos casos para fluidos denominado Fluidostática e assim será obtido uma análise vetorial da fluido em repouso através da equação de Euler modificada I.

METODOLOGIA

Para desenvolver-se este estudo a metodologia a ser utilizada foi moldada a partir da pesquisa bibliográfica (THIOLLENT, 1986). Tomando como bases para o aporte teórico, livros como ANTON, Howard; et al. Cálculo; GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo, Volume 3; HEWITT, Paul G. Física Conceitual; HSU, Hwei P. Análise Vetorial; NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de Física Básica vol.2; e orientações dirigidas utilizando um programa intitulado LyX que proporciona uma forma mais eficiente para o desenvolvimento de equações, e a partir destes métodos garantir um desenvolvimento eficaz para esta pesquisa.

Resultados

Ao analisar vetorialmente a fluidostática para fluidos incompressíveis, ou seja, com densidade constante $z - \vec{v} = \vec{0}$; $\overrightarrow{f_{interna}} = \nabla P$, sabemos que $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V\vec{g}$; $\overrightarrow{f_{peso}} = \rho\vec{g} = -\rho g\hat{k}$, portanto temos:

$$\overrightarrow{f_{interna}} = \nabla P$$

$$-\rho g\hat{k} = \frac{\partial P}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}$$

Teremos portanto: $\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$, desta forma obtemos:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

Assim, pode-se perceber que a partir da equação de Euler resultamos, em uma equação diferencial ordinária, cujo o resultado é dado por:

$$P(z) = P(z_0) + \rho g(z - z_0)$$

Denominada Equação de Steven ou teorema de Steven, que determina a variação da pressão com a altura do fluido disposto, onde a pressão é diretamente proporcional a profundidade e inversamente a altura.

## DISCUSSÃO

Diante destes conhecimentos pode-se determinar analiticamente o teorema de Steven, uma vez que, este é obtido com o uso de analise vetorial da Equação de Euler que foi desiguinada a partir da Força resultante de Newton para sólidos.

Quando trabalhada nos fluidos incompressíveis em estado de repouso a equação de Euler, determina o teorema de Steven, implicando na análise do comportamento de fluidos devido a pressão e a altura em que os mesmos estão dispostos

## CONCLUSÕES

Assim sendo, esta analise diz respeito a uma visão analítica da fluidoestática, que conclui que partindo da segunda lei de Newton em sua versão diferencial, com a contribuição das Leis de conservação da natureza (massa e momento linear), podemos obter a equação de Euler onde ao trabalharmos o Operador e a função – Gradiente – alcançamos uma equação diferencial ordinária que origina a equação ou teorema de Steven.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ANTON, Howard; et al. **Cálculo.** 8ª Edição - Porto Alegre: Bookman, 2007.

HEWITT, Paul G. **Física Conceitual**. 11ª Edição - Porto Alegra: Bookman, 2011.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica** vol.2; Editora Edgard Blucher; Edição 2013.

ROGERS, Melissa J. B.; et al. **Microgravity A Teacher's Guide With Activitiesin Science, Mathematics, and Technology National**. National Aeronautics and Space Administration (NASA), 1997.