

DOI: 10.46943/IX.CONEDU.2023.GT13.001

A DOCÊNCIA EM ÁLGEBRA LINEAR NUM CONTEXTO DE TRABALHO COLABORATIVO

GRACIELA MORO

Professora do Departamento de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, graciela.moro@udesc.br;

IVANETE ZUCHI SIPLE

Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, ivanete.siple@udesc.br;

MARNEI LUIS MANDLER

Professor do Departamento de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, marnel.mandler@udesc.br

KATIANI DA CONCEIÇÃO LOUREIRO

Professora do Departamento de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, katiani.loureiro@udesc.br;

RESUMO

Em nossa prática docente, no ensino de Álgebra Linear, temos vivenciado as dificuldades do ensino e aprendizagem dessa disciplina como discutem diversas pesquisas em Educação Matemática, que estão relacionadas a vários fatores, tais como a pluralidade de linguagens, registros semióticos de representação, ênfase axiomática e a solidude da prática docente. Como enfrentar tais dificuldades, especialmente numa cultura docente na qual a prática tradicional é tão presente? Acreditando no potencial do trabalho colaborativo para a mudança dessa prática, em 2016, foi criado um grupo de trabalho entre docentes de Álgebra Linear, numa instituição pública brasileira, com o objetivo de discutir a sua prática e criar estratégias de ensino de modo a favorecer a aprendizagem nessa disciplina. Assim, este estudo tem por objetivo investigar o potencial do trabalho colaborativo como um meio de promover a mudança na prática do professor de Álgebra Linear, visando enriquecer os processos de ensino e aprendizagem. Atendendo à natureza do objetivo adotamos uma abordagem reflexiva sob a lente da Abordagem Documental do Didático, procurando compreender os significados

atribuídos pelos professores, desse grupo, à sua prática no ensino de Álgebra Linear. Os dados da pesquisa são oriundos dos registros dos encontros realizados entre os pares, dos registros num grupo no Whatsapp, e de um repositório na plataforma Moodle no qual encontram-se os recursos digitais produzidos pelo grupo. A análise dos dados indicia que o trabalho colaborativo propicia a reflexão/ação sobre a prática docente, encoraja os professores na tomada de decisões didáticas, bem como oportuniza o engajamento entre os pares, refletindo no desenvolvimento profissional dos professores envolvidos.

Palavras-chave: Abordagem Documental do Didático, Ensino Superior, Desenvolvimento Profissional, Álgebra Linear, Trabalho Colaborativo.

INTRODUÇÃO

As constantes mudanças da sociedade contemporânea e, em consequência, o surgimento de novas problemáticas na educação, exigem esforços para que os professores adaptem as suas estratégias de ensino buscando constantemente formas mais eficientes de compartilhar conhecimento. O fato de lecionarmos em cursos de formação de professores e de engenheiros tem nos motivado a refletir sobre nossas práticas, especialmente relacionadas ao ensino de Álgebra Linear, nos questionando como ensinar essa componente curricular, que é transversal a diferentes cursos, de maneira que tenha um impacto significativo na aprendizagem e consequentemente na formação dos futuros profissionais. Essa nossa preocupação não é recente, tão pouca exclusiva. “Quem sabe ensinar Álgebra Linear?”. Com esse questionamento Charles Johnson, professor e coautor de livros de Álgebra linear, iniciou sua fala num workshop sobre o ensino de Álgebra Linear, nos Estados Unidos, na década de 90.

Quase ninguém levantou a mão, embora todos os participantes fossem professores experientes de Álgebra Linear. Johnson passou a declarar sua própria ignorância quanto à maneira correta de ensinar Álgebra Linear, apesar de estudar e ensinar o assunto por anos. Esta foi uma declaração preocupante de alguém com suas credenciais. Ele é o coautor de referências padrão na teoria de matrizes, um eminente pesquisador em análise matricial, e também tem sido um líder nacional nos esforços para melhorar a forma como a Álgebra Linear é ensinada (Day; Kalman, 1999, p. 1).

Esse episódio vem de encontro a um preconceito muito enraizado na academia de que para ensinar bem matemática, basta conhecer bem o conteúdo. O ensino da Álgebra Linear é um contraexemplo singular. “O ensino de Álgebra Linear é universalmente reconhecido como difícil” (Dorier, 2002, p.875). Pesquisas têm evidenciado que os alunos quando entram em contato com a parte axiomática da Álgebra Linear, geralmente, se sentem perdidos como se estivessem aterrissando em um planeta desconhecido, eles ficam confusos com a quantidade de definições e com as múltiplas representações dos conceitos, com o formalismo exigido e a falta de conexão com conhecimentos prévios (Harel, 1989; Dorier, 2002).

Ao redor do mundo, diversos pesquisadores têm compartilhado experiências e apresentado sugestões para o ensino da Álgebra Linear de modo a minimizar

as dificuldades dos alunos. Tais sugestões contrariam as estratégias de ensino centradas no professor e que valorizam o conteúdo e a reprodução de técnicas, sobressaindo àquelas centradas na atividade do aluno, na utilização de recursos tecnológicos e na resolução de problemas contextualizados, de modo que o aluno compreenda o significado dos conceitos envolvidos na disciplina (Diković, 2007; Strang, 2014; Strong, 2018). Acontece que, quando o professor pauta a sua prática de ensino em atitudes individuais, para além das demandas que a profissão exige, fica difícil de alterar a sua prática tradicional e colocar em prática tais sugestões.

O trabalho colaborativo entre pares pode se revelar um caminho propício para os professores discutirem as problemáticas evidenciadas no ensino e na aprendizagem da Álgebra Linear. Diversas pesquisas apontam que quando os professores trabalham em colaboração com seus pares em torno de um objetivo comum, há uma maior determinação e segurança para agir e promover as mudanças e inovações da prática de ensino (Boavida; Ponte, 2002; Robutti *et al.*, 2016).

Acreditando que o trabalho em colaboração com pares permite ultrapassar a solidão da profissão docente, enriquecendo a maneira do professor pensar e conferindo apoio e recursos para lidar com os desafios que impõe o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear, um grupo de professores de uma universidade pública brasileira vêm trabalhando conjuntamente desde 2016 na reflexão e criação de propostas de ensino para essa disciplina. Neste estudo ilustraremos a dinâmica de trabalho no grupo e a evolução deste trabalho ao longo do tempo na abordagem de Espaços Vetoriais, focando o tópico de Mudança de Base sob a ótica da Abordagem Documental do Didático. A questão norteadora do estudo é: Quais as potencialidades do trabalho colaborativo entre pares no desenvolvimento e evolução de recursos para o ensino de Mudança de Base?

METODOLOGIA

O estudo possui uma abordagem qualitativa, com ênfase na metodologia de investigação reflexiva para acompanhar o trabalho de um grupo de professores que ensinam Álgebra Linear. A investigação reflexiva foi empregada como uma metodologia de pesquisa empírica, conforme desenvolvida por Trouche, Gueudet e Pepin (2020). Essa abordagem essencialmente envolve a reflexão do professor sobre o próprio trabalho, incorporando também sua posição na coleta de dados. De acordo com Gueudet, Pepin e Trouche (2013), essa metodologia baseia-se em princípios

específicos: acompanhamento de longo prazo e contínuo; acompanhamento dentro e fora da sala de aula; ampla coleta de recursos materiais utilizados e produzidos; e acompanhamento reflexivo do trabalho documental, envolvendo o professor na coleta de dados.

Adotando esses princípios, utilizamos os seguintes instrumentos de pesquisa: registros das reuniões de trabalho do grupo de professores; utilização de um grupo no Whatsapp; e um repositório na plataforma Moodle no qual encontram-se os recursos digitais produzidos pelo grupo. Além disso, cada um dos professores do grupo mantém uma página da sua respectiva disciplina, no Moodle, detalhando os recursos aplicados em suas respectivas salas de aula.

O trabalho colaborativo entre professores de Álgebra Linear vem sendo realizado desde 2016, envolvendo a participação de sete professores, ao longo do tempo, contemplando tanto professores experientes quanto aqueles no estágio inicial de suas trajetórias profissionais (Moro, 2021).

Neste estudo delimitaremos o trabalho do grupo de professores ($n = 4$), no período de 2019 a 2023 (1º semestre), aqui denominados de Camila, Luis, Bruna e Nina. A dinâmica de trabalho no grupo, neste estudo, envolve a criação de recursos para os processos de ensino e aprendizagem de Mudança de Base e a reflexão sobre estes recursos para a realimentação dos mesmos. À luz do referencial teórico, os dados foram analisados com o intuito de perceber os significados conferidos nas ações dos professores do grupo colaborativo no desenvolvimento e evolução de recursos para o ensino de Mudança de Base.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Recursos de diversas naturezas sempre estiveram presentes no trabalho do professor, desempenhando papéis cruciais tanto na dinamização do processo de ensino quanto no suporte à assimilação de conhecimento por parte dos alunos, evoluindo em conjunto com as práticas pedagógicas adotadas. Contudo, a era digital e, mais recentemente, a pandemia intensificaram ainda mais a relevância desses recursos. Nesse contexto, o desenvolvimento profissional, na era digital, vem tomando um lugar importante no contexto da pesquisa, tanto em nível nacional quanto internacional.

Clark-Wilson, Robutti e Thomas (2020) ao questionarem que tipo de pesquisa pode ser necessária para entender o ensino de Matemática com os recursos

tecnológicos em um mundo durante e pós-pandemia, em que o ensino e a aprendizagem da Matemática estão situados em diferentes ambientes, apontam duas temáticas que podem se beneficiar de um estudo mais aprofundado. A primeira é examinar o desenvolvimento profissional do professor que irá integrar a tecnologia em suas salas de aula. A segunda é analisar os resultados de uso a longo prazo da tecnologia nas salas de aula de matemática dos próprios professores. Além disso, os autores apontam que investigar as relações existentes entre a prática efetiva do professor que insere a tecnologia digital na sala de aula e os ganhos na aprendizagem de seus alunos proporcionaria uma consideração mais aprofundada na pesquisa.

A abordagem instrumental (Artigue, 2002; Trouche, 2005), a qual foi inicialmente desenvolvida e utilizada para investigar como os alunos aprendem matemática com tecnologia, ampliou o seu olhar sobre o trabalho do professor, visando investigar as interações entre os professores e recursos e os impactos na prática do professor. Considerar o desenvolvimento profissional do professor por meio de suas interações com os recursos de seu ensino tem sido a essência na Abordagem Documental do Didático (ADD) (Gueudet; Trouche, 2009).

Essa abordagem busca compreender como os professores interagem com os recursos didáticos ao longo do tempo e como essas interações impactam sua prática pedagógica. A ADD contempla o estudo de diversos documentos que os professores utilizam ou produzem no processo de ensino, como por exemplo, planos de aula, materiais instrucionais e trabalhos dos alunos, procurando ir além da simples observação da prática, mas buscando insights valiosos sobre o desenvolvimento profissional contínuo dos educadores. A ADD está especialmente interessada na evolução desses documentos ao longo do tempo, examinando como as interações dos professores com esses documentos contribuem para seu desenvolvimento profissional.

A compreensão de um recurso, na ADD, está ancorada no trabalho de Adler (2000), que define um recurso como qualquer coisa que possa realimentar o trabalho do professor. De acordo com Trouche *et al.* (2020), a ADD mantém essa perspectiva e considera um amplo espectro de recursos: livros didáticos, recursos on-line, trocas de e-mail com colegas, ou ainda produções de alunos, dentre outros. Ainda, segundo Iglioni, Abar e Almeida (2022), o recurso se refere a tudo o que nutre a ação do professor e a evolução pedagógica, como um texto, as bases legais da

educação, um notebook, um software, assim como a produção dos estudantes ou uma atividade realizada por outro professor.

Segundo Pepin, Guedet e Trouche (2013), à medida que a natureza dos recursos evolui e sua acessibilidade cresce, as oportunidades de colaboração entre professores também se expandem por meio desses recursos, tais como o uso de e-mails, reuniões online, fóruns e chats, possibilitando a colaboração à distância.

Consideramos que esses desenvolvimentos destacam a necessidade de pesquisa sobre as interações dos professores com os recursos, especialmente nas dimensões coletivas dessas interações. Além disso, acreditamos que os processos coletivos são de extrema importância para o design e a interação com os recursos: eles podem ocorrer em coletivos de pesquisa baseada em design; em Comunidades de Prática (Wenger, 1998); e também em outros tipos de grupos (Pepin, Guedet, Trouche, p. 929-930, 2013).

Nesse contexto, acreditamos que as interações dos professores com os recursos podem se beneficiar do trabalho entre pares, como na dinâmica propiciada pelos grupos colaborativos. Um grupo colaborativo é entendido como aquele em que os participantes trabalham voluntariamente, sem hierarquia, em torno de um objetivo comum de modo que propicie o desenvolvimento profissional (Boavida; Ponte, 2002). Os participantes de um grupo colaborativo interagem num ambiente de confiança, respeitando as diferentes habilidades e competências de cada um, o que pode contribuir para uma variedade de ideias e conseqüentemente o desenvolvimento de todos os seus membros (Ferreira; Miorim, 2011, Robutti *et al.*, 2016).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um dos tópicos que os professores de Álgebra Linear se sentem desafiados para ensinar e mostrar a aplicabilidade é 'mudança de base' de um espaço vetorial real. Ensinar tal tópico exige a compreensão do que são as coordenadas de um vetor em relação a uma dada base de um espaço vetorial. Acontece que essa definição envolve conceitos de geradores, identificação de vetores linearmente independentes e dependentes, a compreensão de que a base canônica nem sempre é a base (referencial) mais adequada para resolução de determinados problemas. A abordagem desses conceitos nos livros didáticos privilegia a representação algébrica, sem uma preocupação com a transição entre os diferentes registros do

objeto matemático. Como a maioria dos professores pauta o planejamento de suas aulas no recurso do livro didático, essa abordagem algébrica acaba se refletindo na sua prática de ensino. Essa era uma abordagem muito frequente em nosso ensino de Álgebra Linear antes de estarmos inseridos num grupo de trabalho colaborativo em que uma das pautas é a reflexão sobre a nossa prática.

No grupo procuramos ir além da abordagem do livro didático, nos preocupando com a visualização e interpretação geométrica dos conceitos algébricos, de tal forma que esta possibilite, além de explorar o “visual”, fornecer insights para a abstração dos conceitos (Harel, 2000). Para isso, uma das nossas estratégias foi desenvolver tarefas que possibilitam os alunos transitarem entre os diferentes registros de representação (Duval, 2012) para aprendizagem do referido conceito.

Para o desenvolvimento das referidas tarefas, a colaboração entre os membros do grupo foi fundamental, pois as diferentes habilidades dos seus participantes enriqueceram as discussões, contribuindo com uma variedade de ideias, que quando trabalhadas conjuntamente resultou em novos recursos que apoiaram as práticas de ensino dos professores, conforme ilustra a fala da Nina no extrato de uma pesquisa realizada no seio do grupo.

Acho que o grupo conseguiu trabalhar muito bem, tanto na cordialidade, como na forma de trabalho, aproveitando o melhor de cada um. Seis professores com ideias, experiências e práticas diferentes fazem o grupo se tornar rico em informações (...) Juntamos a teoria do professor que tem mais experiência, com a ideia da parte geométrica do professor com menos experiência e no final o resultado foi muito bom (Professora Nina, apud Moro, 2021, p. 321).

Porém, no início do trabalho em equipe, a ênfase na exploração da visualização geométrica dos conceitos estava predominantemente centrada na intervenção do professor, com os alunos poucos engajados nesse processo, conforme evidenciado por um diálogo dentro do grupo.

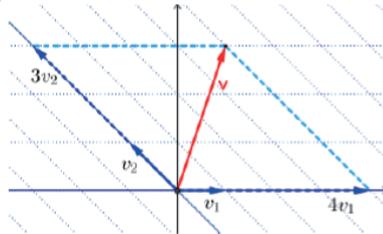
A gente construiu bastante coisa, a gente mudou muitas coisas na maneira de ensinar. Mas na maneira de envolver os alunos, eu acho que ainda a gente ficou bastante no tradicional. (...) Na aula de Mudança de Base, quando utilizei o aplicativo no GeoGebra eu ia lá e digitava a base. Era eu fazendo, não era o aluno fazendo. E em muitas outras situações, eu levei e disse: ‘ah meu Deus, eu trouxe isso aqui’. Mas era eu pensando, não era o aluno pensando (...). Nós continuamos ainda centralizadores de: ‘Ah, isso eu tenho que passar, isso eu tenho que dar’. [Temos que nos

preocupar] em como jogar mais a responsabilidade para o aluno e ter uma aula mais produtiva neste sentido (Professora Bruna, apud Moro, 2021, p. 136).

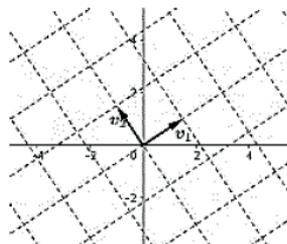
Após a reflexão, no grupo, sobre a concretização de algumas aulas planejadas em conjunto, considerou-se envolver mais o aluno no processo de aprendizagem, promovendo situações em que ele pudesse realizar atividades que o permitissem transitar entre as representações algébrica e geométrica dos conceitos de ‘coordenadas e mudança de base’. Com este propósito, foi elaborada a tarefa ilustrada no Quadro 1, para introduzir o conceito de coordenadas de um vetor em relação a uma base de um espaço vetorial.

Quadro 1. Abordagem geométrica utilizada em sala de aula para introduzir coordenadas de um vetor em relação a uma base.

Questão 1. Observe a Figura e escreva a matriz de coordenadas do vetor v em relação ao referencial $\beta = \{v_1, v_2\}$.



Questão 2. Considere a base $\alpha = \{v_1, v_2\}$ e v um vetor do \mathbb{R}^2 . Sabendo que $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, represente o vetor v geometricamente:



Questão 3. Considere as bases do \mathbb{R}^2 , $\alpha = \{(1,1), (-1,2)\}$ e $\beta = \{(1,0), (1,-1)\}$. Sabendo que $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\beta$. Interprete geometricamente o resultado obtido.

Questão 4. Considere as bases $\alpha = \{1, x^2 - 1, 2x\}$ e $\beta = \{3x + x^2, x^2 - 2, 5\}$ de P_2 .

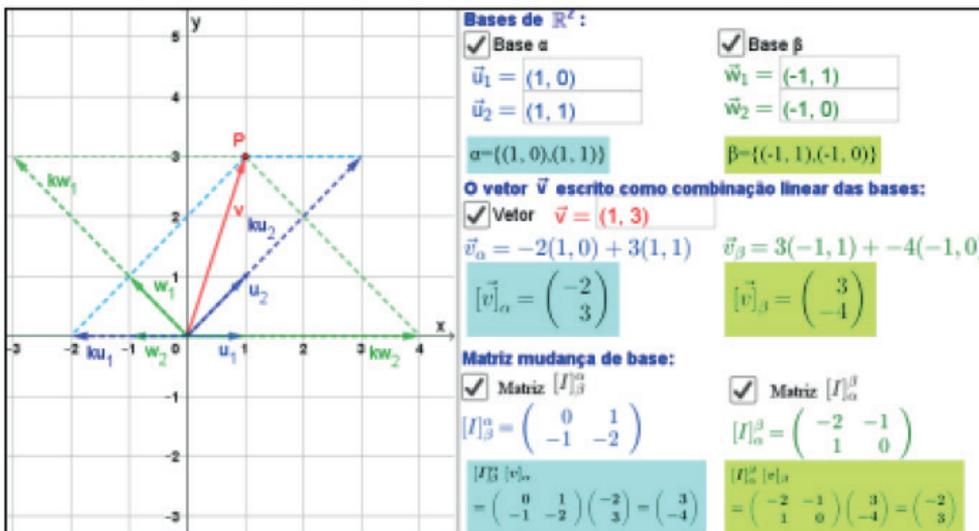
- Encontre a matriz de coordenadas de $p(x) = 3x^2 + 4x + 2$ em relação a base α .
- Sabendo que $[q(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, encontre $[q(x)]_\beta$.

Fonte: Dados da pesquisa (2019/02).

Para resolver esta tarefa (Quadro 1) os alunos tinham em mãos a definição de 'coordenadas' e em grupos foram convidados a resolver tais questões, com recurso ao papel e lápis, que tinham uma abordagem progressiva – primeiramente envolvia um espaço vetorial concreto, o \mathbb{R}^2 , e por último um espaço abstrato, e apresentar as suas soluções para a turma.

Ademais, já tinha sido desenvolvido, no seio do grupo, um aplicativo no GeoGebra (Figura 1) que possibilitava aos alunos um ambiente dinâmico de simulação para testarem as coordenadas de diferentes bases e diferentes vetores de \mathbb{R}^2 , oportunizando transição entre os registos algébricos, geométrico e matricial, o qual foi instrumento potencial tanto nas aulas presenciais quanto na transição para o ensino remoto, durante a pandemia.

Figura 1: Aplicativo do GeoGebra para explorar a mudança de base



Fonte: Moro (2021, p. 139).

Com a pandemia do covid-19 fomos desafiados a adaptar nossos recursos didáticos, que na sua maioria envolvia o recurso do papel e lápis, e transformá-los em recursos para o ensino mediado pelo computador. Os desafios perpassaram sobre quais ferramentas utilizar para ensinar no ambiente virtual, como construir instrumentos de avaliação nesse contexto, levando em consideração que os alunos tinham acesso a uma gama de recursos para encontrar a solução de uma determinada tarefa, além de evitar questões objetivas que pudessem ser respondidas

meramente por tentativa e erro, com a preocupação de envolver uma solução que evidenciasse o conhecimento do conteúdo. O extrato, a seguir, de um diálogo do grupo ilustra alguns destes desafios.

Camila: Vocês já pensaram como fazer as aulas ao vivo? Estou pensando já na possibilidade de ir para a universidade, usar um quadro de lá.

Luis: Eu pensei em fazer pelo BBB mesmo, projetando a tela a mesmo...

Camila: Mas explicando os exercícios em slides?

Luis: Ontem instalei aquele programa que faz o celular virar webcam, se der certo (ainda preciso testar) penso em usar isso, resolvendo na mão os exercícios com os alunos(...) Colocar tudo em slides dá muito trabalho e acho que fica meio maçante para os alunos.

Nina: Eu vou usar slides. Pelo menos a teoria eu vou colocar. Acho que acompanhar em apostila não vai dar certo.

Luis: Também vou usar slides, para teoria e tarefas.

Camila: Ah sim, vou testar ainda essa opção. Talvez alternar com o quadro. Me refiro a aula de exercícios.... (Dados da pesquisa, WhatsApp, 11 de junho de 2020).

Além disso, havia o cuidado com a questão de como avaliar o aluno, valorizando a aprendizagem contínua ao longo do processo, conforme ilustra um extrato de uma discussão efetuada no grupo:

Nina: Vamos pensar em uma prova de múltipla escolha para ALI [Álgebra Linear]?

Camila: Não sei se tenho maturidade ainda para uma prova de múltipla escolha em ALI (...). Temos que pensar em questões que eles não consigam testar as alternativas e que ao mesmo tempo eles tenham que usar os conceitos para resolver. (Dados da pesquisa, WhatsApp, 08 de julho de 2020).

(...)

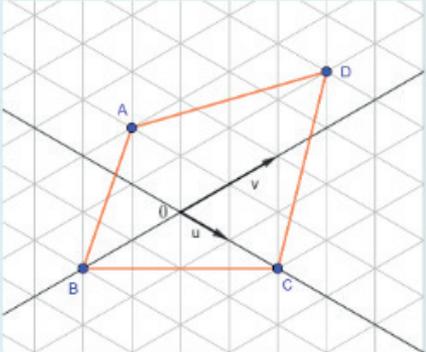
Nina: Sobre base, podem ter várias respostas, né? Então não podemos colocar como alternativa! Poderia ser de resposta rápida? Você sabe fazer isso, Luis?

Camila: Mas mesmo de resposta rápida, como vamos fazer um gabarito? Porque ele pode encontrar uma resposta diferente do gabarito e ainda assim ser verdadeira. Eu acho que de encontrar base tem que ser dissertativa. Ainda não consegui visualizar como cobrar isso. Só aquelas de dimensão mesmo. (Dados da pesquisa, WhatsApp, 24 de julho de 2020).

No que diz respeito aos recursos de comunicação, os professores utilizaram a plataforma Moodle, explorando as diferentes ferramentas disponibilizadas, tais como: tarefa, fóruns, questionários, rótulos, arquivos, plugins como o STACK, Cloze e BigBlueBotton, dentre outros. Os plugins do STACK e Cloze foram utilizados para o desenvolvimento de bancos de questões matemáticas. Tais ferramentas foram exploradas pelas potencialidades que apresentaram para o desenvolvimento de questões que aceitassem respostas algébricas, demonstrações, gráficos e randomização (Sangwin; Köcher, 2016). A Figura 2 ilustra uma tarefa formativa envolvendo o conceito de ‘mudança de base’ em um espaço vetorial real e que explora a transição da representação geométrica para a algébrica.

Figura 2. Questão de uma tarefa formativa proposta no Moodle

O Polígono $ABCD$ está representado em relação à base $\alpha = \{u, v\}$ em que $u = (\sqrt{3}, -1)$ e $v = (2\sqrt{3}, 2)$.



Encontre a matriz de coordenadas de cada um dos vértices da figura, em relação à base $\beta = \{(4\sqrt{3}, -2), (0, -1)\}$.

i) $[A]_{\beta} =$

ii) $[B]_{\beta} =$

iii) $[C]_{\beta} =$

iv) $[D]_{\beta} =$

Fonte: Dados da pesquisa (2021/01).

A necessidade da adoção de avaliações formativas em Álgebra Linear foi um dos elementos do ensino que se sobressaiu nas discussões do grupo nesse período. Era necessário repensar a forma de avaliar nesse novo contexto, pois a forma ‘tradicional’ de avaliar o aluno, como a realizada no presencial não era considerada adequada pelos membros do grupo. Além disso, a falta de interação entre professor e aluno clamava por novas estratégias para engajar os alunos nesse ambiente de aprendizagem, o qual muitas vezes era ‘frio’ e ‘escuro’, sendo assim propostas tarefas formativas e somativas, mediadas pelos recursos digitais, mas também por recurso ao papel e lápis.

A preocupação com a forma de avaliar se manteve no retorno para o ensino presencial, haja vista que não era possível retornar como se nada tivesse acontecido. A dinâmica da sala de aula havia mudado e o grupo optou por olhar para a pandemia como uma oportunidade de mudança (Borba, 2021), visto que ela impulsionou a integração das tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem, em particular da Álgebra Linear. Assim, os recursos digitais desenvolvidos durante a pandemia, se tornaram recursos de aprendizagem formativa, visando o engajamento dos alunos com a sua aprendizagem e a tomada de decisões didática em função das respostas dos alunos. Para tal, as tarefas passaram a ser disponibilizadas semanalmente, no Moodle, com até duas tentativas e com feedback automático, conforme ilustra a Figura 3.

Figura 3. Tarefa formativa de coordenadas e mudança de base disponibilizada no moodle.



Coordenadas e Mudança de base

Tarefa sobre: Coordenadas e Mudança de base

Aberto: Tuesday, 16 May 2023, 17:00 **Fechado:** Monday, 22 May 2023, 23:59

A tarefa avaliativa sobre COORDENADAS e MUDANÇA DE BASE será aplicada de forma online, como um questionário do Moodle. Estará disponível das 00h do dia 16/05/2023 5 até às 23h59min do dia 22/05/2023

Novamente, serão permitidas **duas tentativas** de resposta. A nota atribuída à Tarefa será **mais alta** a ser obtida entre as duas tentativas. No entanto, haverá o **limite de 2 horas** para responder cada tentativa, a contar do horário em que cada aluno acessar o questionário.

Essa tarefa tem **finalidade formativa**, ou seja, objetiva a estimular o estudante a exercitar seus conhecimentos adquiridos sobre o conteúdo **indicado** e a identificar eventuais lacunas em sua aprendizagem, com tempo hábil para sanar as dificuldades enfrentadas antes da avaliação somativa (prova).

Fonte: Dados da pesquisa (2023/01)

Ademais, relativamente ao tópico mudança de base, na reflexão do grupo do feedback da avaliação somativa foi identificado que, embora a tarefa formativa oportunizou a exploração da transição entre os diferentes registros, alguns alunos ainda apresentavam dificuldades nessa transição. Isso levou o grupo a refletir sobre a ação, percebendo que se devia dar mais ênfase a tal transição na abordagem do conteúdo, em sala de aula, conforme evidencia a reflexão da prática do professor Luis, na discussão com o grupo: *“Essa interpretação eu sei que não é fácil. Talvez eu não tenha estimulado muito os alunos a transitarem para o geométrico”* (Dados da Pesquisa, Professor Luis, junho de 2023). Ademais constatou-se que a lista de

exercícios deveria ser reformulada, haja vista que a ênfase das questões privilegiava a representação algébrica.

Eu já pensei em coisas que podemos fazer para os próximos semestres (...) colocar mais exercícios na lista que envolvam essa transição, mais coisas no material que deixamos no Moodle, para estimular que o aluno consiga fazer mais facilmente essa transição (Dados da Pesquisa, Professor Luis, junho de 2023).

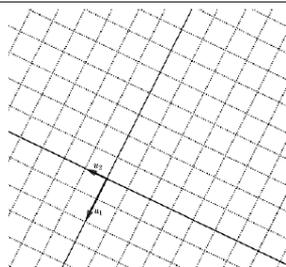
Nesse contexto, o grupo reformulou a lista de exercícios disponibilizada aos alunos. O Quadro 2 ilustra uma questão de mudança de base que explora a transição entre diferentes registros, que foi incorporada na lista de exercícios.

Quadro 2. Questão que explora a transição da representação algébrica para a geométrica, incorporada à lista de exercício usada pelo grupo colaborativo.

Sejam $\alpha = \{u_1, u_2\}$ e $\beta = \{v_1, v_2\}$ bases de um espaço vetorial V com $\dim(V) = 2$. Suponha que $u_1 = -2v_1 + 5v_2$ e $u_2 = 2v_1 - 6v_2$.

a) Determine a matriz mudança de base de β para α , ou seja, a matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$.

b) Suponha que $v \in V$ seja tal que $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Encontre $[v]_{\alpha}$ e, a seguir, represente v no referencial dado abaixo:



Fonte: Dados da pesquisa (2023/01)

Nesse contexto, vislubramos que nossas práticas têm se beneficiado das interações propiciadas pelo trabalho desenvolvido entre os pares. A existência desse trabalho, desde antes da pandemia, nos oportunizou apoio, colaboração, segurança e acima de tudo aprendizado para transformar nossos recursos didáticos em documentos do grupo que oportunizam a reflexão tanto da nossa prática como a do aluno sobre a sua aprendizagem. Isso não se traduziu apenas durante a pandemia, mas também no retorno ao ensino presencial. O trabalho colaborativo entre os pares possibilita que a prática do professor esteja em constante movimento e que os recursos desenvolvidos estejam sempre num processo contínuo de evolução.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos dados indicia que o trabalho colaborativo propicia a reflexão/ação sobre a prática docente, encoraja os professores na tomada de decisões didáticas, bem como oportuniza o engajamento entre os pares, refletindo no desenvolvimento profissional dos professores envolvidos.

Para além disso, procuramos evidenciar as transformações efetuadas em recursos didáticos utilizados pelo grupo colaborativo no ensino de Mudança de Base. A partir das reflexões ocorridas entre os pares, recursos que antes envolviam apenas papel e lápis foram integrados ao software GeoGebra e, posteriormente à plataforma Moodle. Ainda, os recursos passaram a explorar as diversas representações do objeto matemático em estudo, com o intuito de atender as necessidades didáticas, identificadas pelo grupo, de estimular o estudante de Álgebra Linear a transitar entre as diferentes representações (Duval, 2012), como a algébrica e a geométrica, dos conceitos envolvidos.

Também destacamos as potencialidades proporcionadas pelo trabalho colaborativo na evolução do recurso abordado neste estudo. As reflexões efetuadas pelos membros do grupo, após utilizar as diferentes versões do recurso em suas práticas docentes, possibilitaram identificar suas respectivas fragilidades e, com isso, tornou-se possível modificá-lo, adaptá-lo e atualizá-lo para novos usos didáticos, inclusive como instrumento de avaliação formativa.

Gueudet and Trouche (2008) enfatizam que um documento surge da interação entre recursos e esquemas de utilização durante um processo de gênese documental. Esse processo gera novos recursos que podem ser reorganizados, originando novas gêneses. Com base nisso, podemos inferir que os recursos coletivos produzidos pelo trabalho colaborativo entre os professores de Álgebra Linear passaram por uma transformação. Esses recursos foram reconfigurados, resultando na concepção de uma nova gênese no contexto do ensino remoto e do retorno ao ensino presencial. O retorno à presencialidade, juntamente com o abrandamento da Pandemia de Covid-19, também sugere novas perspectivas na concepção das relações de ensino e de aprendizagem. Além disso, implica na suposta integração de novos recursos à metodologia do grupo colaborativo.

Futuras pesquisas podem se concentrar em aprofundar a compreensão da transformação dos recursos coletivos no contexto do ensino de Álgebra Linear. Uma análise mais detalhada dessas transformações pode identificar elementos

específicos que foram reconfigurados durante o processo colaborativo entre os professores, permitindo uma compreensão mais refinada dos impactos dessas mudanças na prática pedagógica. Além disso, é essencial avaliar como as transformações nos recursos coletivos influenciam a experiência de aprendizagem dos alunos. Ademais é importante investigar o impacto no desenvolvimento profissional contínuo dos professores, a adaptação dessas transformações em outras disciplinas, contribuindo assim para orientar futuras práticas pedagógicas e fomentar o trabalho colaborativo em outras disciplinas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FAPESC - Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina pelo apoio financeiro ao Grupo de Pesquisa PEMSA.

REFERÊNCIAS

ADLER, J. Conceptualising resources as a theme for teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, V. 3, P 205 – 224. 2000.

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, V. 7, P. 245–274, 2002.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. Refletir e investigar sobre a prática profissional, [s. l.], n. 2002, P. 43–55, 2002.

CLARK-WILSON, A.; ALDON, G.; CUSI, A.; GOOS, M.; HASPEKIAN, M.; ROBUTTI, O; THOMAS, M. O. J. The challenges of teaching mathematics with digital technologies - The evolving role of the teacher. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.) **Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, V. 1, P. 87–116, 2014.

DAY, J. M.; KALMAN, D. Teaching linear algebra: What are the questions. **Department of Mathematics at American University in Washington DC**, P. 1-16, 1999.

DIKOVIĆ, L. Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies: some examples. **The Teaching of mathematics**, n. 19, p. 109-116, 2007.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT**, V. 7, n. 2, P. 266 – 297, 2012.

FERREIRA, A. C.; MIORIM, M. A. Collaborative Work and the Professional Development of Mathematics Teachers: Analysis of a Brazilian Experience. In. N. Bednarz, D. Fiorentini; R. Huang (Eds.), **International Approaches to Professional Development**, 2011.

GUEUDET, G.; PEPIN, B.; TROUCHE, L. Collective work with resources: An essential dimension for teacher documentation. **ZDM 45**, P. 1003-1016, 2013.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, v. 71, n. 3, p. 199- 218, 2008.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? **Educational Studies in Mathematics**, 71(3), P. 199 – 218, 2009.

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*. **Dordrecht: Kluwer Academic Publishers**, P. 177-189, 2000.

IGLIORI, S. B. C.; ABAR, C. A. A. P.; ALMEIDA, C. B.. Considerações sobre a interação entre professores e pesquisadores no desenvolvimento do Projeto PREMa-EB. **Ensino em Re-Vista**, V. 29, P. 1 - 20 2022. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/54868>. Acesso em: 17 nov. 2023.

MORO, G. **O ensino de álgebra linear nos cursos de graduação de uma universidade brasileira**: perspectivas e contributos da prática colaborativa. 2021. 236 f.

Universidade do Minho. Braga, Portugal, 2021. Disponível em: <<http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/14018>>. Acesso em: 17 nov. 2023.

PEPIN, B.; GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Re-sourcing teacher work and interaction: new perspectives on resource design, use and teacher collaboration. **ZDM: The International Journal on Mathematics Education**, 45(7), P. 929 – 943, 2013.

ROBUTTI, O. *et al.* ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. **ZDM - Mathematics Education**, [s. l.], V. 48, n. 5, P. 651 – 690, 2016.

SANGWIN, C. J.; KÖCHER, N. Automation of mathematics examinations. **Computers and Education**, [s. l.], V. 94, p. 215 – 227, 2016.

STRANG, W. G. A linguagem das máquinas. **Revista CÁLCULO: Matemática para todos**, Ed. 45, ano 4, p.18-21, 2014.

STRONG, D. Motivating examples, meaning and context in teaching linear algebra. In: STEWART, S.; ANDREWS-LARSON, C.; BERMAN, A.; ZANDIEH, M. (Eds) **Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra**. Switzerland: Springer, 2018, p. 337-351.

TROUCHE, L.; GUEUDET, G.; PEPIN, B.; ROCHA, K.; ASSIS, C.; IGLIORI, S. A abordagem documental do didático. **DAD-Multilingual**, 2020. Disponível em: <<https://hal.science/hal-02664943v2>>. Acesso em: 17 nov. 2023.

TROUCHE, L. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In **The didactical challenge of symbolic calculators**, p. 137 – 162, 2005.