DOI: 10.46943/IX.CONEDU.2023.GT13.008

ARTICULAÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE E OS TIPOS DE PROVA DE BALACHEFF

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, marcellaluanna@hotmail.com.

RESUMO

A não utilização das provas e demonstrações matemáticas na sala de aula pode estar relacionada à forma como o professor a apresenta aos seus alunos, de forma pronta e acabada, pedindo para eles reproduzirem tal como mostraram, sem saber que tipo de dificuldades esses alunos terão ao realizar essa tarefa. O presente trabalho apresenta um recorte da tese da autora que teve como objetivo estabelecer uma relação entre os níveis do pensamento geométrico discutidos por van Hiele e os tipos de provas propostos por Balacheff, a partir das argumentações e justificações produzidas por onze licenciandos em Matemática, que se encontravam entre o 6º e o 10º período do curso. Sua pesquisa foi caracterizada como quali-quantitativa, com aspectos de um estudo de caso, utilizando os seguintes procedimentos de coleta de dados: questionário, atividades com provas matemáticas, notas de campo, observação participante, videogravações e entrevistas semiestruturadas, realizadas após a aplicação das atividades. Com o intuito de verificar as articulações possíveis entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova, foram utilizados os principais referenciais teóricos: Balacheff, van Hiele, Jaime e Gutiérrez e Gutiérrez e Jaime. Balacheff, a partir de seus primeiros trabalhos de investigação, conseguiu distinguir quatro tipos principais de provas: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental. Já o modelo do casal van Hiele propõe que os alunos progridam de acordo com uma sequência de cinco níveis de compreensão de conceitos, enquanto aprendem Geometria. Os estudos e discussões teóricas desses pesquisadores, bem como os resultados encontrados com o auxílio dos procedimentos citados acima, contribuíram

para confirmar a existência de articulações entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de provas. Para tanto, somente com o pensamento geométrico desenvolvido, é possível que os alunos construam e elaborem diferentes tipos de prova, podendo também chegar a elaborar demonstrações.

Palavras-chave: Níveis do pensamento geométrico, Provas e demonstrações matemáticas, Educação Matemática, Geometria, Licenciatura em Matemática.

INTRODUÇÃO

Ponte, Pereira e Henriques (2012) afirmam que o grande objetivo do ensino da Matemática é o de desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos, contudo esse raciocínio não será desenvolvido caso o professor utilize a simples memorização de conceitos, representações e procedimentos rotineiros, uma vez que acarretará a percepção de que a Matemática é apenas um conjunto de regras mais ou menos desconexas, o que não é verdade, visto que ela é uma disciplina lógica e coerente. Para que os alunos desenvolvam essa capacidade é preciso trabalhar com tarefas que tanto requerem raciocínio como o estimulem.

Esses pesquisadores consideram que ser capaz de raciocinar é essencial tanto para usar eficazmente a Matemática em diversas situações, como para a sua própria compreensão. Ao raciocínio matemático podemos associar diversas formas de pensamento, tais como prever resultados, questionar soluções, procurar padrões, recorrer a representações alternativas, analisar e sintetizar. Relacionado a essas discussões, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) esperam que o currículo de Matemática contemple atividades que desenvolvam experiências em que os alunos sejam capazes de argumentar, justificar, conjecturar e provar determinados conteúdos, ou seja, atividades que proporcionem o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos.

Balacheff (2000) acredita que os alunos não devem ser obrigados a demonstrar, eles devem, a partir de seus argumentos, serem motivados a pensar, refutar e levantar conjecturas, fazendo com que tome para si a responsabilidade de sua aprendizagem e para que a demonstração faça sentido para ele. Para isso, é necessário descobrir e levar em consideração a racionalidade[1] que eles têm inicialmente, saber como funciona e como pode evoluir, uma vez que é a partir dessa racionalidade que os alunos conseguirão dar sentido a demonstração.

A partir das dificuldades encontradas por seus alunos do curso secundário na Holanda, Dina van Hiele Geldof e Pierre Marrie van Hiele perceberam a relação existente entre a compreensão e o nível de maturidade geométrica do aluno. Assim, a ideia principal do modelo de van Hiele é que os alunos progridam de acordo

1 Balacheff (2002, n.p.) entende racionalidade como "o sistema de critérios ou regras mobilizadas quando é necessário fazer escolhas, tomar decisões ou executar julgamentos" (tradução nossa). Para o pesquisador, a racionalidade nos permite raciocinar e decidir e é então a base de qualquer processo de prova.

ISBN: 978-85-61702-77-9

com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos enquanto aprendem Geometria. Kaleff *et al.* (1994) afirmam que, para o modelo de van Hiele, o crescimento cronológico não produz automaticamente um crescimento nos níveis de pensamento e que decididamente poucos atingem o último nível.

Alguns pesquisadores afirmam que existe uma estreita ligação entre provas e demonstrações e o modelo de van Hiele. De Villiers (2010) afirma que a ocorrência do desenvolvimento da capacidade de provar, dentro desse modelo, surge a partir do nível 3, porém em várias de suas pesquisas empíricas, ele observou que as funções de prova, tais como explicação, descoberta e verificação, podem ser significativas para alunos nos níveis inferiores ao nível 3 de van Hiele, contando que os argumentos sejam de natureza intuitiva ou visual. Isto quer dizer que, os alunos que estão nos níveis 1 ou 2 de van Hiele não duvidam da validade de suas observações empíricas e por isso a demonstração não faz sentido para eles.

Battista e Clements (1995) apresentam Van Dormolen (1977), o qual argumenta que no nível 1 (visual), casos únicos são justificados e as conclusões são restritas ao exemplo específico para o qual a justificação é dada. No nível 2 (descritivo/analítico), as justificativas e as conclusões podem ser feitas para casos específicos, mas referem-se a coleções de objetos semelhantes. Somente após o nível 3 é que os alunos podem justificar as declarações formando argumentos que estejam em conformidade com as normas aceitas, ou seja, após o nível 3, os estudantes são capazes de construir provas formais. Corroborando assim a ideia de De Villiers (2010) apresentada acima.

À vista de toda essa discussão, neste artigo, a autora apresenta um recorte de sua tese que teve como objetivo estabelecer articulações entre os níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff. A tese, orientada pelo Professor Doutor Marcelo Câmara dos Santos, diz respeito a um estudo teórico-prático sobre as articulações existentes entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff. Para isso, buscamos, inicialmente, fazer uma pesquisa bibliográfica, a fim de levantarmos os materiais necessários para estabelecermos essas articulações, utilizando como principais referenciais teóricos: Balacheff (2000), van Hiele (1957), Jaime e Gutiérrez (1994) e Gutiérrez e Jaime (1998).

Posteriormente, a fim de verificarmos a coerência dessas articulações, fizemos um estudo com 11 licenciandos em Matemática, que se encontravam entre o 6º e o 10º período do curso. Para isso, a pesquisa foi caracterizada como

ISBN: 978-85-61702-77-9

quali-quantitativa, exploratória, com aspectos de um estudo de caso, utilizando os seguintes procedimentos de coleta de dados: questionário, atividades com provas matemáticas, notas de campo, observação participante, videogravações e entrevistas semiestruturadas, realizadas após a aplicação das atividades (Gil, 2002). Neste artigo, focaremos apenas na parte teórica da tese, apresentando nos próximos tópicos um resumo dos tipos de provas propostos por Balacheff, os níveis do pensamento geométrico propostos por van Hiele, a metodologia utilizada, os resultados e discussões (enfatizando as relações existentes entre as duas teorias) e as considerações finais.

TIPOS DE PROVAS PROPOSTOS POR BALACHEFF

A não utilização das provas e demonstrações matemáticas na sala de aula pode estar relacionada à forma como o professor a apresenta aos seus alunos, de forma pronta e acabada, pedindo para eles reproduzirem tal como mostraram, sem saber que tipo de dificuldades esses alunos terão ao realizar essa tarefa (Balacheff, 2000). Para o autor, antes de apresentar a demonstração aos alunos, é preciso ter em mente a racionalidade deles e quais são os meios possíveis para eles fazerem matemática.

Para isso, Balacheff (2000) considera importante a distinção entre as palavras ***prova*** e ***demonstração***. Grinkraut (2009) afirma que prova e demonstração não são palavras sinônimas, uma vez que a pesquisadora considera a prova em um sentido mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita pelos matemáticos. Isto quer dizer que a pesquisadora considera as justificativas utilizadas pelos alunos dentro do seu contexto escolar, em termos do raciocínio envolvido, mesmo sabendo que, muitas vezes, eles não conseguiriam atingir a formalidade necessária. Já a demonstração é considerada um tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo. Desse modo, podemos inferir que uma demonstração pode ser um tipo particular de prova, mas nem toda prova é uma demonstração.

Balacheff (2000) evidencia a importância do trabalho com as provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica pois, em seu estudo, ele se interessou em saber qual a natureza das provas, se é possível elucidar uma hierarquia

ISBN: 978-85-61702-77-9

da gênese da demonstração e quais são os meios de provocar sua evolução. Com isso, ele buscou analisar a natureza e a hierarquia das provas, conseguindo identificar dois tipos básicos de provas: as ***pragmáticas*** e as ***intelectuais***. As primeiras são aquelas em que os sujeitos recorrem a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado. Já as segundas, são aquelas em que o discurso a ser utilizado é unicamente teórico, não necessitando tomar observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura.

A partir de seus primeiros trabalhos de investigação, Balacheff (2000) conseguiu distinguir quatro tipos principais de ***provas pragmáticas*** e ***intelectuais*** que terão um lugar privilegiado na gênese cognitiva da demonstração: o ***empirismo ingênuo***, a ***experiência crucial***, o ***exemplo genérico*** e a ***experiência mental***. O autor considera uma hierarquia hipotética desses níveis de prova, evidenciada pela ordem acima apresentada. A posição de cada tipo de prova dentro dessa hierarquia é determinada pelo seu nível de exigência de generalidade e por seu nível de conceituação dos conhecimentos que exige.

De acordo com Balacheff (2000), o ***empirismo ingênuo*** consiste em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos. Esse modo de validação é rudimentar e insuficiente, como também é uma das primeiras formas do processo de validação. Na ***experiência crucial,*** o aluno busca validar uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar, como também realiza experiências e começa a tomar consciência de que busca por um resultado geral.

Para Balacheff (2000), no ***exemplo genérico,*** o aluno busca uma generalização ainda baseada em exemplos, mas procurando justificá-la com a teoria relacionada a esta proposição. Ou seja, o aluno justifica a partir de um exemplo, o que ele poderia ter feito teoricamente, utilizando incógnitas ou variáveis. Na ***experiência mental***, o aluno afirma a validade de uma proposição de forma genérica e não faz mais referência ao caso particular, uma vez que a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é sustentada pela teoria. Para o pesquisador, quando se recorre à ***experiência mental*** significa a marca verdadeira da transição das ***provas pragmáticas*** às ***provas intelectuais***, na medida em que as provas passam de ações efetivas a ações interiorizadas (no sentido de Piaget) postas em prática.

Além disso, é importante enfatizar que Balacheff (2000) argumenta que, na transição da ***experiência mental*** para a ***demonstração***, devem ser reconhecidos diferentes tipos de ***provas intelectuais*** que diferem tanto em seus níveis de

ISBN: 978-85-61702-77-9

descontextualização, atemporalidade e despersonalização[2], como em seu nível de formalismo. O pesquisador afirma que ainda falta fazer uma análise dessas provas e sua tipologia. Do ponto de vista da ***demonstração***, entendida como estrutura do discurso, o nível de formalização dos conhecimentos que coloca em prática é um ponto crucial. Assim, ainda é preciso mais estudos para verificar o que acontece durante esse processo de construção das provas e demonstrações e se realmente há outros tipos de provas entre a ***experiência mental*** e a ***demonstração***. Portanto, pode-se inferir que a ***experiência mental*** ainda não seria considerada uma ***demonstração***, mas já é o primeiro tipo de prova dentro da categoria ***intelectual***, no qual o aluno utiliza apenas o discurso teórico para validar uma afirmação.

NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE

O casal van Hiele, ao identificar as dificuldades encontradas por seus alunos do curso secundário na Holanda, elaborou um modelo estabelecendo a relação entre a compreensão e o nível de maturidade geométrica do aluno. Nesse sentido, a proposta elaborada pelo casal pode ser utilizada tanto para orientar na formação quanto para avaliar as habilidades do aluno.

A ideia principal do modelo de van Hiele é que os alunos progridam de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto aprendem Geometria. Uma das principais características desse modelo é a distinção entre os cinco níveis de pensamento com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos em Geometria. Em resumo, esses níveis são atingidos em sequência e, por meio de uma instrução adequada, o aluno vivencia cinco fases ao progredir de um nível para outro superior.

No primeiro nível, ***visualização*** ou ***reconhecimento***, os alunos reconhecem as figuras por sua aparência global, mas não conseguem identificar explicitamente suas propriedades. Ou seja, os alunos, nesse nível, podem aprender o vocabulário

2 O desenvolvimento da linguagem, como uma ferramenta para o cálculo lógico e não apenas um meio de comunicação, requer em particular: "uma **descontextualização** ou renúncia ao objeto atual como um meio eficaz de executar as ações, para acessar a categoria de objetos, independentemente das circunstâncias associadas ou anedóticas de sua aparência; uma **despersonalização**, separando a ação de quem foi seu ator e da qual ela deve ser independente; uma **atemporalidade**, liberando as operações a partir da data em que foram realizadas e sua duração anedótica. Esse processo marca a transição do universo de ações para o de relacionamentos e operações" (Balacheff, 2000, p. 23). [tradução nossa]

ISBN: 978-85-61702-77-9

geométrico, identificam figuras geométricas, reproduzem uma figura dada, associam o nome à figura, reconhecem nos elementos do meio ambiente representações de figuras geométricas, porém eles não conseguem reconhecer as figuras por suas propriedades e não enxergam as características de uma figura em outra da mesma classe (Van Hiele, 1957; De Villiers, 2010; Nasser, 1992; Kaleff ***et al.***, 1994; Dall'Alba, 2015).

No segundo nível, ***análise***, o aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si. Isto quer dizer que ele começa a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades que são, então, utilizadas para conceituarem classes e formas, porém ele ainda não explicita inter-relações entre figuras e propriedades (Van Hiele, 1957; De Villiers, 2010; Nasser, 1992; Kaleff ***et al.***, 1994; Dall'Alba, 2015).

No terceiro nível, ***dedução informal*** ou ***ordenação***, os alunos relacionam as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não dominam o processo dedutivo. Dessa forma, eles conseguem formar definições abstratas, estabelecendo inter-relações das propriedades nas figuras e entre figuras. Esses alunos podem distinguir entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico como também conseguem acompanhar e formular argumentos e provas informais, porém não compreendem o significado de uma dedução como um tudo nem têm condições de elaborar argumentos e provas formais (Van Hiele, 1957; De Villiers, 2010; Nasser, 1992; Kaleff ***et al.***, 1994; Dall'Alba, 2015).

No quarto nível, ***dedução formal***, o aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema e já está ciente de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas. Além disso, nesse nível, o aluno pode construir provas e não somente memorizá-las, como também percebe a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de uma maneira. Por fim, no quinto e último nível, ***rigor***, o aluno compreende a importância do rigor nas demonstrações e é capaz de analisar outras geometrias, tais como a Geometria Não-Euclidiana. Além disso, ele consegue utilizar sistemas dedutivos abstratos, como também é capaz de fazer ligações entre os conceitos e desenvolver, às vezes, novos postulados (Van Hiele, 1957; De Villiers, 2010; Nasser, 1992; Kaleff ***et al.***, 1994; Dall'Alba, 2015).

ISBN: 978-85-61702-77-9

Portanto, a partir das leituras dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conseguimos perceber que é essencial que os professores saibam combinar a aprendizagem com o nível de pensamento do aluno, tomando consciência de adaptar as atividades para cada nível, de modo a auxiliar no desenvolvimento de um para outro. Para que haja esse desenvolvimento do pensamento geométrico, é necessário que as atividades no ensino da Geometria não sejam reduzidas a memorizações e aplicações de fórmulas e regras, pois, conforme recomenda-se, não poderá ocorrer a diminuição da linguagem e dos exercícios de determinado conteúdo dentro desses níveis de pensamento.

METODOLOGIA

A parte teórica da tese da autora diz respeito a uma pesquisa de natureza qualitativa, uma vez que tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve um grupo de participantes (D'Ambrósio, 2004). Além disso, reconhecemos que ela faz parte dessa categoria, pois, de acordo com Garnica (2004), sabemos da transitoriedade de seus resultados; a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; a não neutralidade do pesquisar que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvincilhar; entre outros aspectos.

Acreditamos também que nossa pesquisa é exploratória, pois, de acordo com Gil (2002), essas pesquisas têm como objetivo proporcionar uma maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Nesse tipo de pesquisa, o objetivo principal é o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuição. Assim, nosso objetivo foi, a partir das discussões trazidas por Balacheff (2000), van Hiele (1957), Jaime e Gutiérrez (1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), entre outros, estabelecer uma relação entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova. Para essa parte teórica, a pesquisa teve como foco a bibliográfica, desenvolvida com base em materiais já elaborados, constituído principalmente de livros e artigos científicos (Gil, 2002), a partir dos referenciais citados acima.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Pietropaolo (2005) afirma que o modelo de van Hiele possui estreita ligação com a habilidade de justificar em Matemática. Nasser e Tinoco (2003) argumentam

ISBN: 978-85-61702-77-9

que nos dois primeiros níveis, os alunos não duvidam da validade de suas observações empíricas e, por isso, não percebem que a demonstração é necessária. Senk (1989) acrescenta que a demonstração deve ser desenvolvida apenas em salas de aula cujos alunos estejam pelo menos no nível 3, uma vez que antes disso eles não conseguirão acompanhar o professor e poderão não perceber a importância dela na Matemática.

Battista e Clements (1995) apresentam uma relação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e o processo de justificativa e prova, abordada por Van Dormolen (1977). Esse pesquisador considera que no nível 1 de van Hiele, os casos únicos são justificados e as conclusões são restritas ao exemplo específico para o qual a justificação é dada. No nível 2, as justificativas e as conclusões podem ser feitas para casos específicos, mas referem-se a coleções de objetos semelhantes. Somente após o nível 3 é que os alunos podem justificar as declarações com base em argumentos que estejam em conformidade com as normas aceitas, ou seja, após o nível 3, os alunos já são capazes de construir provas formais.

De Villiers (1987) também discute um pouco sobre os níveis de van Hiele e o raciocínio dedutivo. Para o pesquisador, o raciocínio dedutivo ocorre apenas no nível 3, pois é quando a rede de relações/implicações lógicas entre propriedades é estabelecida, enquanto o significado de dedutivo formal e demonstração só é entendido no nível seguinte (o quarto). Os alunos que estão nos níveis 1 e 2 em relação a um tópico específico não irão entender instruções direcionadas às atividades e significados dos níveis mais altos. Como eles não possuem essa rede de implicações lógicas, acabam experimentando uma determinada prova como uma tentativa de verificação do resultado. No entanto, como ele não duvida da validade de suas observações empíricas, então experimenta tal prova como sem sentido, pois está provando o que já lhe é óbvio.

Todos os pesquisadores apresentados anteriormente discutem a mesma questão, indicando que as provas formais só devem ser trabalhadas a partir do nível 3. Encontramos nos artigos dos pesquisadores espanhóis Gutiérrez e Jaime aportes que norteiam a nossa articulação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff, pois eles trabalham com quatro processos-chave dentro dos quatro primeiros níveis de van Hiele, em que um deles diz respeito à ***prova*** de propriedades ou declarações, com o intuito de convencer alguém a veracidade de uma declaração, nos permitindo com isso estabelecer uma articulação mais específica entre esses níveis e os tipos de prova de Balacheff.

ISBN: 978-85-61702-77-9

Jaime e Gutiérrez (1990) descrevem a relação existente entre os níveis de van Hiele e a linguagem, pois para eles as diferentes habilidades de raciocínio associadas aos quatro primeiros níveis não refletem apenas na maneira de como os alunos resolvem os problemas propostos, mas também no modo como eles expressam as suas ideias e no significado dado a um determinado vocabulário. Os pesquisadores neste artigo trabalham apenas com os quatro primeiros níveis de van Hiele, pois seu trabalho foi desenvolvido com alunos do Ensino Fundamental e Médio. Jaime (1993) também discute sobre essa relação, argumentando que cada nível tem sua linguagem própria, significando não apenas as palavras ou construções gramaticais utilizadas, mas também o significado dado a elas.

Dentro desta perspectiva, Jaime e Gutiérrez (1990) afirmam que a palavra ***demonstração*** tem diferentes significados para as pessoas que raciocinam em diferentes níveis. No nível 1 de van Hiele, a palavra demonstração não tem significado matemático, o que geralmente é traduzido no raciocínio mais disparatado. Para um aluno de nível 2, demonstrar consiste simplesmente em verificar que a afirmação é verdadeira em alguns casos, mesmo em apenas um, fazendo as medidas apropriadas com alguma ferramenta, sendo então suficiente para aceitar a verdade da afirmação. No nível 3, essa palavra já tem um significado próximo ao dado pelos matemáticos: as demonstrações são formadas pelo raciocínio lógico, embora seus argumentos ainda sejam informais, baseados na observação de exemplos concretos. Por fim, no nível 4, a palavra demonstração já tem o significado usual entre os matemáticos, conseguindo construir provas formais que levem em consideração a teoria subjacente às afirmações. Ou seja, provavelmente um aluno do nível 4 fará a mesma demonstração do nível 3, seguindo os mesmos passos, mas agora ele justificará as igualdades baseadas em outras propriedades matemáticas já conhecidas.

Ainda sobre esse trabalho de descrição dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele, Jaime e Gutiérrez (1994) descrevem quatro principais processos-chave dentro dos quatro primeiros níveis de van Hiele, não considerando o nível 5, pois sua pesquisa foi realizada com alunos do Ensino Fundamental e Médio. Os pesquisadores descrevem esses processos-chave da seguinte maneira: ***identificação*** da família a que um objeto geométrico pertence; ***definição*** de um conceito, entendido como a utilização de determinadas situações e a formulação de uma classe de objetos geométricos; ***classificação*** de objetos geométricos em diferentes famílias; e ***prova*** de propriedades ou declarações, com o intuito de convencer alguém da veracidade de uma declaração. Esses processos-chave identificados

ISBN: 978-85-61702-77-9

pelos pesquisadores contribuem ainda mais para uma classificação adequada do nível de pensamento geométrico do aluno.

De acordo com Jaime e Gutiérrez (1994), no nível 1 a identificação das figuras é feita a partir de suas características físicas globais, tais como aspecto, tamanho dos elementos, posição etc. Como esses alunos levam em consideração somente os atributos a objetos físicos de maneira global ou a propriedades não-matemáticas, então eles não são capazes de ler uma definição matemática, pois para eles o conceito já é a própria definição. Para classificar, os alunos utilizam o mesmo tipo de propriedade das figuras que nos processos anteriores, pois não são capazes de aceitar quaisquer relações entre duas famílias diferentes nem, muitas vezes, entre dois elementos da mesma família com aspecto físico bastante diferente. Nesse nível não há indícios de prova.

No nível 2, segundo Jaime e Gutiérrez (1994), os alunos já conseguem identificar as figuras geométricas com base em suas propriedades matemáticas. Embora já prestem atenção às propriedades matemáticas, esses alunos podem ter problemas com algumas partículas lógicas ao ler ou declarar definições. Por isso, algumas vezes eles podem omitir uma propriedade necessária, que estão utilizando implicitamente e outras vezes acabam fornecendo uma lista com mais propriedades do que as necessárias. A classificação nesse nível é exclusiva, ou seja, os alunos não relacionam as famílias com base nos atributos fornecidos nas definições e quando recebem uma nova definição de determinando conceito, diferente da que já conheciam, eles não admitem a nova definição, pois estavam habituados a utilizar definições exclusivas e receberam as inclusivas. Os alunos desse nível provam a veracidade de determinada propriedade por meio de um ou alguns exemplos.

Jaime e Gutiérrez (1994) afirmam que no nível 3 os alunos já são capazes de interpretar e declarar definições, estando conscientes de que um conjunto necessário e suficiente de propriedades é importante e que adicionar mais propriedades à definição não resultará em uma melhor, ou seja, ao fornecer uma definição, os alunos tentam não ser redundantes. Eles já fazem classificações inclusivas com base nas propriedades declaradas nas definições dadas dos conceitos e são capazes de mudar de ideia quando novas definições são dadas, mesmo quando há uma mudança de exclusiva para inclusiva, ou vice-versa. Nesse nível, os alunos podem verificar a propriedade a partir de alguns exemplos, mas eles também procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas, ou os exemplos são bem selecionados.

Por fim, Jaime e Gutiérrez (1994) afirmam que no nível 4 os alunos já têm um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito. Aqui eles já são capazes de fazer provas matemáticas formais e as figuras específicas são utilizadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas.

Concordamos com as declarações feitas por Jaime e Gutiérrez (1994) e percebemos a conexão existente com as discussões trazidas anteriormente por Battista e Clements (1995), Pietropaolo (2005), Nasser e Tinoco (2003), Senk (1989) e Jaime e Gutiérrez (1990), confirmando que as provas formais só poderão ser trabalhadas e ensinadas a partir do nível 3 de van Hiele, embora nesse nível ainda seja feita informalmente, mas eles conseguem acompanhar o desenvolvimento delas pelo professor. A partir do nível 2, de acordo com Jaime e Gutiérrez (1990), o aluno começa a desenvolver seu raciocínio matemático, uma vez que ele busca provar a veracidade de afirmações por meio de um ou mais exemplos. E esse raciocínio continua a ser desenvolvido nos níveis posteriores, a partir do momento em que os alunos começam a estabelecer relações entre figuras e classes de famílias, a compreender as propriedades inclusivas de figuras geométricas e a perceber que busca por algo geral e não mais por meio de exemplos.

Percebemos o quão todas essas pesquisas apresentadas acima possuem inter-relações, de modo que todas elas evidenciam a necessidade de se trabalhar com os alunos as argumentações, justificações, provas e demonstrações, dependendo do grau de maturidade e de conhecimentos geométricos deles, ou seja, sabendo em que nível de pensamento eles se encontram, é possível trabalhar com as provas e demonstrações, adaptando as atividades para cada nível e utilizando a linguagem e o material didático adequados, com o intuito de desenvolver o raciocínio geométrico da melhor forma possível.

Além disso, toda essa discussão nos fez perceber a conexão existente entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e o processo de justificação e prova na Matemática. Pesquisadores como Battista e Clements (1995), Nasser e Tinoco (2003), Senk (1985, 1989), De Villiers (1987), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998), Usiskin (1982), Vargas e Araya (2013), Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016), entre outros, perceberam essa relação, apresentando de forma geral

ISBN: 978-85-61702-77-9

uma ligação existente entre os níveis de van Hiele, a linguagem adotada e o entendimento da palavra demonstração dentro de cada nível. Ou seja, esses pesquisadores concluíram que no nível 1, os alunos ainda não são capazes de realizar provas. No nível 2, eles começam a provar a validade de determinada afirmação de maneira empírica, por meio de um ou mais exemplos. No nível 3, os alunos utilizam alguns exemplos, mas já procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades ou os exemplos são bem selecionados. No nível 4, eles já são capazes de realizar provas formais. E, no nível 5, o aluno é treinado para analisar o grau de rigor de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si, pois já capturam a Geometria de forma estritamente abstrata.

A partir dessas colocações, em nossa pesquisa buscamos estabelecer uma articulação mais específica entre os níveis de pensamento geométrico e o processo de justificar em Matemática, ou seja, diferencia-se no sentido de que exploramos uma articulação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff.

Considerando as descrições dos níveis de van Hiele feitas por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), utilizando os processos-chave (reconhecimento/identificação, definição, classificação e prova) para facilitar a identificação desses níveis, conseguimos enxergar uma articulação bastante específica entre esses níveis e os tipos de prova propostos por Balacheff (2000).

No ***nível 1*** (***visualização***) de van Hiele, o aluno ***não entende o conceito de prova e de demonstração***, por isso nesse nível os alunos não produzem nenhum tipo de construção empírica ou dedutiva, pois eles só reconhecem as figuras por sua aparência global, identificando apenas o aspecto, o tamanho dos elementos, a posição etc. Também não são capazes de ler uma definição matemática, pois para eles o conceito é a própria definição. E por isso não são capazes de aceitar qualquer relação entre duas famílias diferentes, nem entre dois elementos da mesma família com aspecto físico bastante diferente (Lima, 2020).

No ***nível 2*** (***análise***) de van Hiele, o aluno já busca uma verificação experimental da verdade de uma propriedade, utilizando um ou alguns exemplos. Então, dependendo do grau de aquisição dessas habilidades pelos alunos, a verificação pode ser feita por meio de um ou mais exemplos específicos, ou de um exemplo especial ou por meio de um conjunto de exemplos mais elaborado. Com isso, conseguimos relacionar dois tipos específicos de provas (dentro das ***pragmáticas***) de Balacheff (2000) que podem ser produzidos por alunos que estejam nesse nível, a

ISBN: 978-85-61702-77-9

saber: ***empirismo ingênuo***, consistindo em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos particulares; e ***experiência mental***, buscando verificar para um caso especial, geralmente não familiar, como também realizando experiências e começando a tomar consciência de que busca por um resultado geral. Os alunos nesse nível já conseguem escrever provas empíricas, pois já reconhecem as figuras geométricas com base em suas propriedades, mas ainda não entendem a estrutura lógica das definições e por isso só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos particulares (Lima, 2020).

No ***nível 3*** (***dedução informal***) de van Hiele, os alunos podem verificar a propriedade a ser provada em alguns exemplos, mas eles também procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas ou os exemplos são bem selecionados. Além disso, sabemos que nesse nível o aluno ainda não compreende as provas formais em sua totalidade e por isso ele não consegue organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações. Com isso, conseguimos relacionar um único tipo específico de prova proposto por Balacheff (2000) que pode ser produzido por alunos que estejam nesse nível, a saber: ***exemplo genérico***, que se encontra na transição entre as ***provas pragmáticas*** e as ***intelectuais***, pois o aluno busca uma generalização ainda baseada em exemplos, porém procurando justificá-la com a teoria relacionada a esta proposição, ou seja, o aluno justifica a partir de um exemplo, o que ele poderia ter feito teoricamente, utilizando incógnitas ou variáveis. Os alunos nesse nível constroem provas ainda baseadas na experimentação, porque não sentem a necessidade de utilizar o raciocínio lógico-formal, como também não entendem o sistema axiomático da Matemática. Por conta disso, eles acabam produzindo provas informais, ainda baseadas em exemplos, contudo procuram relacioná-la com a teoria (Lima, 2020).

No ***nível 4*** (***dedução formal***) de van Hiele, os alunos já são capazes de fazer provas matemáticas formais e as figuras específicas são utilizadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer implicações com base em definições, axiomas e teoremas já demonstrados. Com isso, conseguimos relacionar um único tipo específico de prova (dentro das ***intelectuais***) proposto por Balacheff (2000) que pode ser produzido por alunos que estejam nesse nível, a saber: ***experiência mental***, buscando verificar a validade de uma proposição de forma genérica e não fazem mais referência a casos particulares, pois a validação é sustentada pela teoria. Sendo isso possível, porque os alunos já têm um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a

ISBN: 978-85-61702-77-9

equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, uma vez que já entendem e executam o raciocínio lógico-formal e as provas formais têm significado para eles e sentem sua necessidade como um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. Ou seja, nesse nível, eles já podem entender a estrutura axiomática da Matemática, mas ainda não sentem a necessidade do rigor (Lima, 2020).

Resumidamente, apresentamos o quadro abaixo (Quadro 1) com o intuito de simplificar as articulações estabelecidas acima entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele, discutidos por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), e os tipos de prova propostos por Balacheff (2000).

Quadro 1 – Articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff, com as respectivas justificativas

Articulações	Justificativa
Nível 1 Não há construção de provas.	Os alunos fazem apenas atribuições físicas globais das figuras geométricas, atribuindo um significado apenas visual, pois ainda não são capazes de usar determinadas definições matemáticas e de reconhecer as figuras por suas propriedades. Consequentemente, eles ***não entendem o conceito de prova e de demonstração*** e por isso nesse nível não produzem nenhum tipo de construção empírica ou formal.
Nível 2 Construção de ***provas pragmáticas*** do tipo ***empirismo ingênuo*** ou ***experiência crucial***.	Os alunos já reconhecem que as figuras geométricas são dotadas de propriedades matemáticas, mas ainda não relacionam as famílias de figuras com base nos atributos fornecidos nas definições. Com isso, eles buscam uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um ou alguns exemplos. Dependendo do grau de aquisição dessas habilidades pelos alunos, a verificação pode ser feita por meio de um ou mais exemplos específicos, ou de um exemplo especial ou por meio de um conjunto de exemplos mais elaborado.
Nível 3 Construção de provas que estão na transição entre as ***pragmáticas*** e as ***intelectuais*** do tipo ***exemplo genérico.***	Os alunos já relacionam as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas ainda não dominam o processo dedutivo. Eles começam a desenvolver a capacidade de raciocínio formal (matemático), mas ainda é apoiada pela manipulação. Esses alunos já podem deduzir e provar informalmente as afirmações. Por conta disso, eles verificam a propriedade a ser provada em um ou alguns exemplos, mas também procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas, ou os exemplos são bem selecionados.

ISBN: 978-85-61702-77-9

Articulações	Justificativa
Nível 4 Construção de ***provas intelectuais*** do tipo ***experiência mental.***	Os alunos já compreendem o processo dedutivo, a recíproca de um teorema, mas ainda não sentem necessidade de usar o rigor matemático. Eles já podem entender e realizar provas dedutivas formais e entendem a sua necessidade como um dos meios de verificar a verdade de uma afirmação de forma genérica. Por conta disso, eles utilizam as figuras apenas para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a construção de sua prova formal.

Fonte: Lima (2020, p. 363-364)

A palavra ***demonstração*** é entendida por Balacheff (2000) como uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras, caracterizando assim a demonstração como um gênero de discurso estritamente codificado. Com isso, acreditamos que Balacheff (2000) não entende a ***experiência mental*** como a ***demonstração*** em si, pois para ele existem outros tipos de ***provas intelectuais*** na transição da ***experiência mental*** para a ***demonstração***, diferindo em seus níveis de descontextualização, atemporalidade e despersonalização, como também em seu nível de formalismo (Lima, 2020).

Por conta dessa discussão trazida por Balacheff (2000), acreditamos que o *nível 5* (*rigor*) de van Hiele está além do tipo de prova ***experiência mental***, pois nesse nível os alunos já compreendem a importância do rigor nas demonstrações e são capazes de analisar outras Geometrias, trabalhando com sistemas dedutivos abstratos e com a Geometria não-Euclidiana, conseguindo assim fazer ligações entre os conceitos e desenvolvendo, às vezes, novos postulados. Devido ao seu alto grau de abstração, os alunos já são treinados para analisar o grau de rigor de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si, podendo apreciar a consistência, a independência e a integridade dos axiomas dos fundamentos da Geometria. Além disso, os alunos desse nível já têm a capacidade de compreender a importância da precisão ao lidar com os fundamentos e as relações entre as estruturas matemáticas (Lima, 2020).

Portanto, compreendendo o nível 5 com esse significado e conceito, e sendo ainda pouco discutido por pesquisadores, tais como Usiskin (1982), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Jaime (1993), Gutiérrez e Jaime (1998), Oliveira (2012), entre outros e pelo próprio van Hiele (1957), como também compreendendo a discussão trazida por Balacheff (2000) acerca do conceito de ***demonstração***, inferimos que esse ***nível 5 (rigor)*** de van Hiele está associado com as ***demonstrações***, que consistem em uma teoria matemática, fundamentando-se em um corpo de conhecimento

ISBN: 978-85-61702-77-9

fortemente institucionalizado sobre um conjunto de definições, de teoremas e de regras de dedução, cuja validade é aceita matemática e socialmente tendo como um dos fundamentos o rigor matemático (Lima, 2020).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das discussões feitas, conseguimos perceber a ligação existente entre os níveis do pensamento geométrico de van Hiele e o processo de provas e demonstrações, que começa a ser iniciado pelo nível 2, com provas utilizando exemplos e verificações empíricas e se desenvolve até chegar na construção de provas intelectuais (nível 4). Lembrando sempre que esse desenvolvimento deve ser feito quando o professor conhece e sabe das características do modelo de van Hiele e reconhece que quando aluno e professor falam diferentes "idiomas", não existe a possibilidade de ocorrer a aprendizagem (Jaime, 1993). Portanto, o professor deve trabalhar com o material adequado e a linguagem adequada, de modo a atingir a maioria de seus alunos.

Os estudos e discussões teóricas de Balacheff (2000), van Hiele (1957), Jaime e Gutiérrez (1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), bem como os resultados encontrados da parte prática da tese (estudo realizado com 11 licenciandos em Matemática), utilizando os seguintes procedimentos de coleta de dados: questionário, atividades com provas matemáticas, notas de campo, observação participante, videogravações e entrevistas semiestruturadas, realizadas após a aplicação das atividades, contribuíram para confirmar a existência das articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de provas propostos por Balacheff discutidas acima.

Resumidamente, percebe-se que os alunos que se encontram no nível 1 de van Hiele não entendem o conceito de ***prova*** ou de ***demonstração*** e por isso eles não produzem nenhum tipo de construção empírica ou dedutiva. Os alunos que se encontram no nível 2 podem produzir dois tipos de prova de Balacheff, tais como: o ***empirismo ingênuo*** e a ***experiência crucial***, que se encontra na categoria das ***provas pragmáticas***, utilizando-se de exemplos e casos particulares. Os alunos que se encontram no nível 3 de van Hiele podem produzir um tipo de prova de Balacheff, como o ***exemplo genérico***, uma vez que o aluno busca uma generalização ainda baseada em exemplos, estando na transição das ***provas pragmáticas*** para as ***provas intelectuais***. Os alunos que se encontram no nível 4 de van Hiele podem produzir um

ISBN: 978-85-61702-77-9

tipo de prova de Balacheff, como a ***experiência mental***, que se encontra na categoria das ***provas intelectuais***, pois os alunos afirmam a validade de uma proposição de forma genérica e não fazem mais referência a casos particulares. Por fim, os alunos que se encontram no nível 5 de van Hiele já conseguem ***demonstrar*** os resultados matemáticos, uma vez que a demonstração se fundamenta sobre um conjunto de definições, de teoremas e de regras de dedução, cuja validade é aceita matemática e socialmente, tendo como um dos fundamentos o rigor matemático.

Portanto, conclui-se que somente com o pensamento geométrico desenvolvido, é possível que os alunos construam e elaborem diferentes tipos de prova, podendo também chegar a elaborar demonstrações. Conforme recomendação de Nasser e Tinoco (2003), é preciso auxiliar os alunos a desenvolverem o raciocínio lógico-dedutivo e a habilidade de argumentar. E para isso é preciso utilizar as provas e demonstrações de modo a propiciá-los o ***fazer matemática***, envolvendo experimentações, conjecturas, refutações, argumentações e justificações.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. H. Geometry and proof. **Mathematics Teacher**, n. 88(1), p. 48-54, 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto. MEC-SEF. Brasília. 1998. 148p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 13 maio 2018.

DALL'ALBA, C. S. **Possibilidade de utilização do software GeoGebra no desenvolvimento do pensamento geométrico de um grupo de alunos do sexto ano do ensino fundamental**. 188f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2015.

ISBN: 978-85-61702-77-9

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio (2004). *In:* BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DE VILLIERS, M. **Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele Theory:** Some critical comments. University of Stellenbosch: RUMEUS, 1987. Disponível em: http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/VanHieleCritique-87.pdf. Acesso em: 15 jun. 2018.

____________. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010. Tradução de Celina A. A. P. Abar.

DÍAZ, M. A; GUTIÉRREZ, A; JAIME, A. Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. **Enseñanza de las Ciencias**, 34.1, p. 107-128, 2016.

GARNICA, A. V. M. História oral e Educação Matemática. *In:* **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.). Belo Horizonte: Autêntica, 2004, p. 77-98.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a Prova Matemática:** Um olhar sobre o Desenvolvimento Profissional. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. **Focus on Learning Problems in Mathematics,** *20*(2/3), 27-46, 1998.

JAIME, A. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele:** La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento. 379f. Tesis Doctoral - Universidad de Valencia, España, 1993.

JAIME, A; GUTIÉRREZ, A. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares; M. Sánchez, (Eds.), **Teoría y**

ISBN: 978-85-61702-77-9

práctica en educación matemática. Colección Ciencias de la Educación, *4*, p. 295-384. Sevilla, España: Alfar, 1990.

____________. A model of test design to assess the Van Hiele levels. *In*: **Proceedings of the 18th PME Conference** (vol. 3, pp. 41-48). Lisboa, Portugal: PME, 1994.

KALEFF, A. M. *et al*. Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de van Hiele. **BOLEMA**, Rio Claro - SP, v. 10, p. 21-30, 1994.

LIMA, M. L. S. **Um estudo sobre as provas e demonstrações na Licenciatura em Matemática: articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff**. 398f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

NASSER, L. Níveis de Van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria?. **Boletim GEPEM**, 29, 21-25, 1992.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de Matemática**. 2 Ed. Projeto Fundão. Rio de Janeiro: Editora do IM/UFRJ, 2003.

OLIVEIRA, M. C. **Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir do estudo de sólidos geométricos**. 279f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica**. 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PONTE, J. P.; PEREIRA, J. M.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Práxis Educativa**, Paraná, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.

SENK, S. L. How well do students write geometry proof's? **The Mathematics Teacher**, vol. 78, n. 6, p. 448-456, 1985.

ISBN: 978-85-61702-77-9

______________. Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal for Research in Mathematics Education**, 20(3), p. 309-321, 1989.

USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry**. CDASSG Project. The University of Chicago. Chicago (USA). 1982.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria)**. (Tese de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais). Tradução Rosa Corberán *et al*. Universidade de Utrecht: Utrecht, Holanda, 1957.

VARGAS, G. V; ARAYA, R. G. El modelo de van Hiele e la enseñanza de la Geometría. **UNICIENCIA**, vol. 27, n. 1, p. 74-94. jan./jun. 2013.

ISBN: 978-85-61702-77-9