RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Roberto Alfredo Nascimento (1); Augusto Cesar de Castro Barbosa (2); Cláudia Ferreira Reis Concordido (3); Marcus Vinicius Tovar Costa (4)

(1) *Escola Municipal Nereu Sampaio,* (2,3,4) *Universidade do Estado do Rio de Janeiro*

Resumo: Este trabalho apresenta uma proposta de introdução dos conceitos da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, através da metodologia de Resolução de Problemas. Tal metodologia foi adotada com o intuito de tornar a aprendizagem mais significativa, de forma a que os alunos possam ligar o conteúdo apresentado com situações do seu dia a dia. Acreditamos que com essa abordagem seja possível trabalhar os princípios básicos da Análise Combinatória, tais como o Princípio da Adição e o da Multiplicação ainda no Ensino Fundamental. Propomos para isso um conjunto de atividades contextualizadas, para serem desenvolvidas em forma de oficina, com turmas de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Análise Combinatória, Ensino Fundamental.

Introdução

A Matemática é, sem dúvida, uma disciplina desafiadora para a maioria dos alunos. Em geral, o que se verifica é que ela se torna uma verdadeira barreira, que pode provocar até mesmo a desistência do estudante em aprender os seus conteúdos. Talvez um dos maiores responsáveis por essa situação seja a excessiva quantidade de assuntos estudados em cada ano escolar. Tal situação faz com que os conteúdos matemáticos sejam abordados muito rapidamente e por vezes de uma forma bastante superficial, resultando numa falta de interesse ainda maior dos alunos, pois os mesmos não são levados a compreender o significado verdadeiro dos assuntos que estão sendo discutidos.

Em vista disso, é necessário que os professores dessa disciplina busquem um caminho didático-pedagógico a fim de que essa barreira que impossibilita a real apropriação dos conceitos matemáticos seja derrubada.

Acreditamos que um bom caminho para se abordar a Análise Combinatória, que é um dos pilares da Matemática Discreta e parte relevante da Teoria de Probabilidade, seja o estudo das coleções finitas de objetos que satisfazem normas determinadas e tem interesse, de modo especial, pela "contagem" de objetos nessas coleções. Este é um tema que provoca grande dificuldade por parte dos alunos e, até mesmo de alguns professores, pois o uso excessivo de fórmulas desnecessárias e descontextualizadas acaba trazendo um grande sentimento de insegurança durante as resoluções dos problemas abordados (VASQUEZ e NOGUTI, 2004).

A necessidade do estudo de problemas de contagem surge quando se precisa determinar, por exemplo, o total de combinações possíveis para placas de identificação de veículos no Brasil ou a quantidade máxima de números de telefone celular de uma cidade que podem ser formados com prefixo 2310, usando além do prefixo, quatro outros algarismos.

A justificativa para trazer a Análise Combinatória para o Ensino Fundamental foi facilitar a aquisição de seus princípios fundamentais, explorando situações corriqueiras vivenciadas pelos alunos, tais como escolhas de roupas para sair, possibilidades de programas no final de semana ou de formação de um time de futebol, etc. Apesar de ser um tema que pode facilmente ser ligado a situações cotidianas e de estar presente em importantes processos seletivos, não faz parte do currículo das escolas municipais da cidade do Rio de Janeiro.

Batanero (1997) e Roa e Navarro-Pelayo (2001) afirmam que iniciar o trabalho com Análise Combinatória no Ensino Fundamental, utilizando a construção de diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o estudo, pode facilitar a abordagem desse assunto no Ensino Médio. Os alunos que costumam geralmente apresentar maiores dificuldades com relação a esse tema são os que nunca tiveram contato com o conteúdo desde as séries iniciais.

O objetivo deste trabalho é propor uma forma de introduzir os conceitos básicos da Análise Combinatória de maneira mais significativa, sem se basear na simples memorização de fórmulas e utilizando a metodologia de resolução de problemas como um meio para a sua construção.

O professor de Matemática deve criar condições para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, de sua capacidade de abstração e de análise. Uma das maneiras de proporcionar aos alunos essas condições é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino, pois ela é capaz de criar mecanismos que propiciam um ambiente de descobertas (GOMES, CASTRO BARBOSA e CONCORDIDO, 2017).

A palavra “problema” não está restrita ao ambiente escolar, ela pode aparecer a qualquer momento em nosso cotidiano. A Matemática é uma área do conhecimento que surgiu e tem se desenvolvido a partir dos problemas que a humanidade encontra (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004). Portanto, é fundamental que a resolução de problemas ocupe papel de destaque no ensino da Matemática. Para o ensino da Matemática acontecer através da resolução de problemas, no entanto, não basta que o professor tenha um bom conhecimento do conteúdo, necessita-se também de criatividade a fim de incentivar os alunos a participar das atividades propostas.

O ensino da Matemática nas primeiras décadas do século XX estava baseado principalmente na repetição, na memorização e no treinamento, com o objetivo de fixar os conceitos. Ensinar a resolver problemas significava apresentá-los, juntamente com uma técnica específica para a sua resolução (ONUCHIC, 2013). Somente em meados do século passado surgiu a ideia de se tratar a resolução de problemas como metodologia de ensino em Matemática. Foi então que se destacou o nome de George Polya como referência nessa área, sem que, no entanto, a efetiva aplicação dessas novas ideias tivesse lugar, uma vez que os professores, de uma forma geral, naquele momento, não estavam preparados para essa tarefa.

Na década de 1970, ainda durante o período do movimento da Matemática Moderna, que se caracterizava pela formalidade e pelo rigor da teoria dos conjuntos e da álgebra, começaram a ser desenvolvidos estudos sobre a resolução de problemas e suas implicações curriculares. Existiam então três tipos de concepção acerca do método da resolução de problemas: ensinar sobre a resolução de problemas, para a resolução de problemas ou por meio da resolução de problemas (SCHROEDER e LESTER, 1989 apud ONUCHIC, 1999). Na primeira concepção, a resolução de problemas pode ser vista como um processo, como "um meio para desenvolver o potencial heurístico do aluno" (MENDONÇA, 1993, p. 260). A segunda tem a resolução de problemas como um objetivo – uma meta final. Já na terceira, a resolução de problemas é um ponto de partida, que dispara um processo de construção do conhecimento matemático.

Nos Estados Unidos, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou o documento *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's*, trazendo a recomendação de colocar a resolução de problemas como o principal ponto da matemática escolar nos anos de 1980 (ALLEVATO, 2008).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) surgiram no Brasil no final do século XX e, no âmbito da Matemática, influenciados pela *Agenda* do NCTM, trouxeram uma proposta de como trabalhar a resolução de problemas. A partir de então, a resolução de problemas passou a ser sugerida como o ponto de partida no ensino da Matemática. Segundo os PCN (BRASIL, 1998), a organização do trabalho pedagógico, a partir da resolução de problemas, "traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução".

Metodologia

Do ponto de vista do professor, ensinar os alunos a resolver problemas não se restringe apenas a desenvolver no aluno habilidades e muni-lo de estratégias para resolver questões matemáticas. Resolver problemas significa também criar no aluno hábitos e atitudes de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. Do ponto de vista do aluno, resolver problemas não deve ser apenas uma questão de encontrar a solução. Nesse sentido, é preciso, além disso, saber propor o problema para si mesmo e fazer com que esse seja solucionado. Para que isso ocorra, o problema deve ser investigado, questionado, estudado e então resolvido, pois o objetivo principal da metodologia de resolução de problemas é levar o aluno a ter capacidade de propor problemas e de resolvê-los (COUTINHO et al., 2016).

Um cuidado que o professor deve ter é não incorrer no erro frequente de tomar como problemas meros exercícios de repetição (disfarçados de problemas), para fixar os conteúdos. Para resolver esses exercícios, ao contrário dos problemas, é preciso somente usar uma sequência de procedimentos padronizados. Dessa forma, o aluno não é levado a desenvolver a capacidade de transpor o raciocínio utilizado para o estudo de outros assuntos.

Apresentamos a seguir um exemplo a respeito da diferença entre um problema e um exercício. Em Análise Combinatória, poderíamos considerar como problema uma questão do tipo: quando jogamos uma moeda três vezes, quantas sequências diferentes de cara e coroa podemos obter? Já uma questão como a que segue poderia ser considerada como um exercício: quantos anagramas possui a palavra CINEMA?

Dessas questões, percebemos que o exercício almeja simplesmente fixar uma certa técnica e esta é a razão pela qual ele deve ser utilizado como uma ferramenta didática. No exemplo dado, basta o aluno aplicar a fórmula de permutação para seis elementos (seis letras distintas), obtendo como resposta $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Por outro lado, um problema, como na primeira questão, pode gerar no aluno o desenvolvimento do raciocínio lógico, bem como do senso crítico. Para resolver esta questão, o aluno pode adotar diversas estratégias diferentes. Uma delas seria, a partir da observação que existem somente dois resultados possíveis em cada lançamento – cara ou coroa –, listar as sequências possíveis; o aluno encontraria $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$.

Com este trabalho propomos um conjunto de atividades que permita construir os conceitos da Análise Combinatória através da metodologia de resolução de problemas. Tais atividades podem ser executadas em forma de uma oficina, com alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Essa oficina é também composta, para sua avaliação, de um pré-teste e de um pós-teste.

Para formular as atividades, tomamos as seguintes fontes: a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), visto que as questões de Análise Combinatória estão sempre presentes, são contextualizadas e apresentam um grau de dificuldade considerável; o CANGURU DE MATEMÁTICA, que é uma competição internacional, cuja principal missão é a popularização da Matemática pelo mundo, envolvendo estudantes entre 7 e 18 anos, que devem resolver 24 ou 30 testes de múltipla escolha relativamente fáceis em 90 minutos (ou mais, dependendo do país participante); o ENEM, que contém, atualmente, 45 questões de Matemática, que em sua maior parte são contextualizadas e cuja resolução pode ser obtida de várias formas distintas, aspecto importante na metodologia de resolução de problemas; o livro “Prelúdio à Análise Combinatória”, dos autores Bachx, Poppe e Tavares (1975), cuja proposta foge do ensino tradicional da Análise Combinatória, evitando o trabalho mecânico dos estudantes e apresentando os fundamentos de uma maneira extremamente clara e objetiva, pautada no princípio multiplicativo (NASCIMENTO, 2018).

Resultados e Discussão

A escolha das questões é um aspecto bastante importante, uma vez que devem representar situações interessantes e desafiadoras para o aluno e, além disso, contemplarem o conteúdo referente ao raciocínio combinatório. Em relação ao nível de dificuldade, o ideal é buscar inicialmente uma gradação crescente para depois variar, de modo alternado, questões com graus diferentes de complexidade.

Durante a realização das atividades, seguindo a metodologia de resolução de problemas, cabe ao docente as seguintes funções: incentivar os alunos a criar estratégias e desenvolver argumentações para se tornarem mais aptos a explicar de forma clara suas ideias; estimulá-los a trabalhar em equipe; acompanhar o trabalho dos grupos indagando a respeito de suas conjecturas; colaborar com o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos discentes, por meio de questionamentos; dar suporte aos alunos, dando-lhes autonomia e valorizando suas ideias, bem como, avaliar o progresso de cada um deles.

Antes da realização das atividades, deve ser aplicado um pré-teste, com o intuito de aferir como se processa o raciocínio combinatório desses alunos que ainda não entraram em contato com o conteúdo da matéria. Ao final das atividades, aplica-se um pós-teste, com o propósito de analisar se houve ganhos decorrentes da realização das ações propostas e, em caso afirmativo, quais foram eles.

A proposta inicial pode ser convidar o aluno a descobrir o número de peças que compõem um jogo de dominó tradicional. As demais atividades consistiriam de listas compostas por problemas diversos para serem discutidos e resolvidos pelos alunos. As questões sugeridas devem levar em conta situações que abranjam o princípio fundamental da contagem e o cálculo de permutações, arranjos e combinações.

As atividades devem ser desenvolvidas com a formação de grupos de, no máximo, cinco alunos. A finalidade de dividi-los em grupos é assegurar a chance de cada aluno debater as questões com os seus colegas de grupo e ampliar sua capacidade de cooperação e argumentação de ideias. Esses debates devem ser estimulados de forma que os discentes alcancem a ratificação de seus estratagemas dentro do próprio grupo e, desse modo, necessitem menos da consulta ao professor. As resoluções devem ser compartilhadas após o término de cada uma das atividades, ou seja, cada grupo expõe os registros de suas ideias para os demais alunos da turma e para o docente.

A oficina é composta de 10 aulas de cinquenta minutos, divididas em cinco dias. Sugerimos o seguinte roteiro para o desenvolvimento da oficina.

No primeiro dia, aplica-se o pré-teste individual, nos moldes que apresentamos no quadro 1.

Quadro 1 – Pré-teste.

1. Daniela planeja ir à praia e deseja utilizar uma regata, um short e uma sandália. Sabe-se que ela possui 4 regatas, 2 shorts e 2 sandálias. De quantas formas diferentes Daniela poderá vestir-se?
2. De quantas formas diferentes 4 pessoas podem formar uma fila?
3. Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 6 e 7?
4. Numa circunferência são marcados 5 pontos. Determine o número de triângulos que podemos formar com vértices nestes pontos.

A primeira questão pode ser resolvida através do princípio fundamental da contagem. O resultado da segunda questão pode ser obtido por enumeração dos agrupamentos. A terceira, por sua vez, envolve a ideia de arranjo e demanda uma maior atenção no enunciado; vale ressaltar que o vasto número de possibilidades põe obstáculos à enumeração dos agrupamentos. Já a quarta, e última questão, estimula o aluno a refletir sobre a ideia de combinação por meio de um problema que aborda agrupamentos não ordenados.

No segundo dia, são realizadas apenas duas atividades, ambas em grupo. A primeira atividade é a determinação do número de peças de um jogo de dominó tradicional. Deve-se conduzir uma discussão em que seja possível explorar as diversas estratégias de resolução, propostas pelos alunos. Espera-se que essa atividade consuma a maior parte do tempo. A atividade dois é a resolução e discussão da questão: quantos são os anagramas da palavra FLOR? Vale mencionar que essa questão, nesse estágio inicial, em que ainda não houve uma abordagem formal dos métodos de contagem, pode ser considerada como um problema.

Para o terceiro dia, são propostas três questões para novamente serem resolvidas em grupo (quadro 2).

Quadro 2 – Atividade do terceiro dia.

1. Nove alunos participaram de uma reunião e no final, cada um cumprimentou outro, apenas uma vez, através de um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram dados ao todo? 2. Em um grupo de seis alunos, dois deles não se toleram e não desejam sair lado a lado em uma fotografia. De quantos modos diferentes esse grupo de alunos poderá posar para a fotografia, respeitando essa incompatibilidade? 3. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 6 cadeiras em fila?

Espera-se que as discussões sobre as resoluções do dia anterior sejam úteis no desenvolvimento dessas questões, uma vez que o raciocínio empregado em cada uma das delas tem um paralelo com o que foi utilizado anteriormente.

No quarto dia são apresentadas mais quatro questões com um grau maior de dificuldade, como mostra o quadro 3.

Quadro 3 – Atividade do quarto dia.

1. Uma bandeira de papel é formada por seis faixas horizontais de mesma largura. Para pintar as faixas de bandeira temos três cores: branco, azul e verde. De quantas formas podemos pintar essa bandeira, sem que duas faixas consecutivas tenham a mesma cor? 2. A lanchonete “C que sabe” possui 9 opções de vitaminas e 7 de sanduíches. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode: a) beber uma vitamina ou comer um sanduíche? b) beber uma vitamina e comer um sanduíche? 3. Num grupo de alunos composto por 3 rapazes e 4 moças, de quantos modos pode-se escolher um representante e um vice representante para a turma? 4. Uma turma de amigos possui 4 meninos e 5 meninas. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas contendo, no mínimo, uma menina?

A primeira e a terceira questões são as mais simples; a segunda apresenta um maior grau de dificuldade e a quarta é um desafio.

No quinto e último dia, deve ser realizado o pós-teste, que podemos também chamar de teste diagnóstico, cuja função é avaliar o resultado da oficina (quadro 4).

Quadro 4 – Pós-teste.

1. Frederico planeja ir à praia e deseja utilizar uma camiseta, uma bermuda e um chinelo. Sabe-se que ele possui 6 camisetas, 4 bermudas e 3 chinelos. De quantas formas diferentes Frederico poderá vestir-se? 2. De quantas formas diferentes 7 pessoas podem formar uma fila? 3. Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 5, 6, 8 e 9? 4. Numa circunferência são marcados 6 pontos. Determine o número de triângulos que podemos formar com vértices nestes pontos.

Conclusões

Este trabalho procurou, através da metodologia de Resolução de Problemas, mostrar a possibilidade de se introduzir os conceitos básicos da Análise Combinatória no Ensino Fundamental. Nesta abordagem, o aluno, em geral, se torna protagonista no processo de aprendizagem ao construir tais conceitos matemáticos durante a resolução do problema. A formalização desse conteúdo começaria a ser feita em seguida pelo professor e finalizada no Ensino Médio.

Acreditamos que a aprendizagem da Análise Combinatória possa ocorrer de uma forma mais significativa, ao se abandonar o ensino tradicional, normalmente baseado na memorização de fórmulas. Para isso, é fundamental que o docente assuma uma postura reflexiva a respeito do modo de ensinar esse conteúdo, visto que o uso demasiado de fórmulas desnecessárias e descontextualizadas pode resultar em um sentimento de insegurança, inclusive por parte dele, durante as resoluções dos problemas abordados.

Essa proposta didática, a ser executada em forma de oficina, é permeada de atividades que facilitam a construção dos conceitos básicos da Análise Combinatória por meio da metodologia de Resolução de Problemas e essas atividades devem ser avaliadas através da comparação dos resultados de um pré-teste e de um pós-teste. Analisando as diferenças entre os registros das resoluções do pré e do pós-teste, espera-se verificar se houve contribuições significativas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e do trabalho em equipe.

O pano de fundo dessa proposta é a ideia que o ensino de Matemática se torna mais atrativo para o aluno quando ele se depara com problemas desafiadores e significativos, ao invés de apenas exercícios que se distanciam do contexto do aluno e que o remetam à memorização de fórmulas.

Dessa forma, acreditamos que problemas bem elaborados e contextualizados podem proporcionar ao aluno o gosto pela descoberta de possíveis soluções. Com isso, esperamos que ele venha a ter interesse pela Matemática, uma vez que sua curiosidade e sua criatividade serão estimuladas.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Diferentes olhares em resolução de problemas no Brasil e no Mundo**. Rio Claro: UNESP, 2008.

BACHX, A.C.; POPPE, L.M.B.; TAVARES, R.N.O. **Prelúdio à Análise Combinatória**, Companhia Editora Nacional, 1975.

BATANERO, C. Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria. **Educación Matemática**, 8(1), 26-39. 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COUTINHO, R. P. et al. Resolução de Problemas em Matemática - uma aplicação. **Ensino, Saúde e Ambiente**, v. 9, p. 249-268, 2016.

GOMES, D. A.; CASTRO BARBOSA, A. C. de; CONCORDIDO, C. F. R. Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas: análise da disciplina RPM implantada pela SEEDUC-RJ. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, p. 105-120, 2017.

MENDONÇA, M. C. D. **Problematização**: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática. 1993. 307 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

NASCIMENTO, R. A. **Análise Combinatória no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas**. 2018. 108 f. Dissertação (PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

______. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Espaço Pedagógico.** Passo Fundo, RS, v. 20, n. 1, p. 88-104, 2013. Disponível em: <http://www.upf.br/seer/index.php/rep/article/view/3509/2294>. Acesso em: 30 de abril de 2018.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad**. In: Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

VASQUEZ, C.M.R.; NOGUTI, F.C.H. **Análise Combinatória**: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 30 de abril de 2018.