

O PROBLEMA DO BALÃO: UMA EXPERIÊNCIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Beatriz Rodrigues de Almeida; Stanley Borges de Oliveira (Orientador)

(Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, e-mail: biarodriguesda@gmail.com; Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, e-mail:borges.stanley@gmail.com)

Resumo: Esse trabalho tem por objetivo, desenvolver a aprendizagem de trigonometria por intermédio da Resolução de Problemas. Foi proposto na disciplina de Matemática II, do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB, campus VI, o problema do balão, onde a pesquisadora busca através da Resolução de Problemas, chegar a sua solução e fazendo com que este caminho de aprendizagem seja desenvolvido na prática docente, além de desenvolver o senso crítico, racional, e interpretativo do aluno. A intenção da resolução do problema foi expor a estratégia de trabalho utilizada, onde, por meio dos seus conhecimentos prévios, consiga-se obter resultados satisfatórios. Com essa pesquisa, também buscamos entender o entusiasmo de futuros professores de matemática, fazendo com que estes, futuramente, reflitam sobre a aprendizagem através da resolução de problemas. Essa pesquisa é de caráter bibliográfico e qualitativo, com resultado parcial.

Palavras-chave: Trigonometria, Matemática Básica II, Resolução de Problemas.

Introdução

A trigonometria é um dos mais antigos ramos da Matemática, surgida na antiguidade para medir ângulos e distâncias com o objetivo de localizar pontos sobre a superfície terrestre a fim de resolver problemas oriundos das necessidades humanas. Hoje é utilizada em várias situações práticas e teóricas da Matemática e outras áreas que envolvem fenômenos periódicos como, por exemplo, eletricidade, termodinâmica, óptica, eletrocardiogramas, entre outros (HUANCA, 2007).

A trigonometria é sem dúvida, junto com as demais ciências, uma ferramenta importante para humanidade. Nesse sentido, a motivação para escrever este trabalho surgiu durante a disciplina de Matemática II, do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB, campus Monteiro, ministrada pelo professor-orientador no início de 2018. Onde ele apresentou o problema do balão como desafio para a turma, deu um tempo, passado em média duas semanas, fui escolhida para escrever este artigo, pois fiquei interessada em resolver este problema já que meus colegas da turma encontraram dificuldade em resolver esse problema, por isso, achei fundamental e necessário ir em busca de sua solução. Então, durante a resolução do problema, nos mantivemos apoiados na metodologia de resolução de problemas de Onuchic (1999).

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de como desenvolver a aprendizagem dos conceitos relacionados à Trigonometria através da Metodologia de Resolução de Problemas. Para isso, apoiamo-nos na teoria de Onuchic e Brighenti e resolvemos “o problema do balão”.

Dessa experiência do problema do balão, resultou este trabalho, que ficou composto da seguinte maneira: Uma breve introdução, à histórica da trigonometria, o referencial teórico, a metodologia, resultados e discussão, e, por fim, apresento as conclusões.

História da Trigonometria

A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um homem só – ou nação. Tomamos como exemplo disso, os Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes, que foram conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Desse modo, dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que “trigonometria”, a medida de partes de um triângulo.

Foram os gregos, os primeiros a encontrar um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. Com isso, as propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e possivelmente Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. Nas obras Euclides relata-se que não há trigonometria no sentido escrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. Encontramos no livro Os elementos, nas Proposições II.12 e II.13, por exemplo, que são as leis de co-senos para ângulos obtuso e agudo respectivamente, enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonometria, foram provadas por método semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras. No entanto, os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos. (BOYER, 1996)

Ainda no contexto da história de trigonometria, Boyer (1996, p.108) disse que, “o teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada pode facilmente ser traduzido em linguagem trigonométrica a fórmulas para senos de somas e diferenças de ângulos”. Além disso, cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina- notadamente Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 a.C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310- 230 a.C.) tratavam problemas que

indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

Também, desde os dias de Hiparco até os tempos modernos não havia coisas como razões trigonométricas. Os gregos, e depois deles os hindus e os árabes, usaram linhas trigonométricas. Essas a princípio tiveram a forma de cordas num círculo, como vimos, e coube a Ptolomeu associar valores numéricos (ou aproximações) às cordas.

Este, ainda dando continuidade ao desenvolvimento, achou necessárias duas convenções; 1) algum esquema para subdividir a circunferência de um círculo e 2) alguma regra para subdividir o diâmetro. A parecer, a divisão de uma circunferência em 360 graus esteve em uso na Grécia desde os dias de Hiparco, no entanto, não se sabe bem como a convenção surgiu.

Ainda dentro deste raciocínio, sabe-se que não é improvável que a medida de 360 graus tenha sido tomada da astronomia, onde o zodíaco fora dividido em doze “signos” ou 36 “decanatos”, pois, um ciclo de estações, de aproximadamente 360 dias, podia ser facilmente posto em correspondência com os sistemas de signos zodiacais e decanatos, subdividindo cada signo em trinta partes e cada decanato em dez partes. Sabemos que nosso sistema comum de medida de ângulos pode derivar dessa correspondência.

Boyer (1996) afirma que,

Como o sistema babilônico posicional para frações era evidentemente superior às frações unitárias egípcias e as frações comuns gregas, era natural que Ptolomeu subdividisse seus graus em sessenta partes minutae primae, cada uma das quais era dividida em sessenta partes minutae secundae, e assim por diante. É das frases latinas, que os tradutores usaram que proveem nossas palavras ‘minutos’ e ‘segundos’ (BOYER, 1996, p. 113).

Decerto, o que levou a Ptolomeu a subdividir o diâmetro de seu círculo em 120 partes e cada uma delas foi subdivida novamente em sessenta minutos de comprimento em sessenta segundos. Essas identidades trigonométricas podem facilmente ser traduzidas para a linguagem de cordas de Ptolomeu por meio das relações simples,

$$\text{sen } x = \frac{cd 2x}{120} \text{ e } \text{cos } x = \frac{cd(180^\circ - 2x)}{120}$$

Já as fórmulas $\text{cos}(x \pm y) = \text{cos } x \text{cos } y \pm \text{sen } x \text{sen } y$ ficavam assim

$$cd \overline{2x \pm 2y} = \frac{cd \overline{2x} cd \overline{2y} \pm cd \overline{2x} cd \overline{2y}}{120}$$

Referencial Teórico

Desde a antiguidade, resolver problemas tem significado uma prática para lecionar Matemática cujo ideal pedagógico é que o ensino deveria dar-se pela ação. O problema é definido por meio de uma tarefa ou atividade onde os estudantes não têm regra ou métodos ou a percepção de que existe uma decisão correta e o resultado é a sua aprendizagem quando se ensina através da resolução de problemas (NCTM, 2017).

Walle (2001) coloca que os professores de Matemática, para serem realmente eficientes, devem desenvolver quatro componentes básicos em suas atividades: gostar da disciplina Matemática, o que significa fazer Matemática com prazer; compreender como os alunos aprendem e constroem suas ideias; ter habilidade em integrar diariamente a avaliação com o processo de ensino a fim de melhorar esse processo e aumentar a aprendizagem.

A partir destas ideias, trabalha-se na reforma do ensino de Matemática. Fazer o aluno entender fórmulas, e seu devido significado, formando seres de ensino básico com uma base sólida na disciplina. Com isso, no final da década de 80, no documento An agenda for Action (NCTM, 1980) preocupados com o progresso da Matemática, desenvolvem recomendações, onde, uma delas diz: “resolver problemas deve ser o foco da Educação Matemática escolar para os anos 80”.

Schroeder & Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes de abordar Resolução de Problemas: teorizar sobre Resolução de Problemas; ensinar a resolver problemas; e ensinar Matemática através da Resolução de problemas. Observou-se que apesar de haver estudantes que não sabiam Matemática, estes eram bons resolvidores de problemas.

O PCN busca fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideia Matemáticas, estabelecer relações com elas, saber se comunicar com elas e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da Matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles. Contudo, qual a porcentagem de professores qualificados e preparados para esta mudança? Nesse contexto, a Resolução de Problemas serve como ponto de partida para fazer Matemática na prática docente.

Aprovamos quando o PCN+ Ensino Médio dizem que a Trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações trigonométricas, em detrimento de aspectos importantes das funções trigonométricas e das análises de seus gráficos. Sendo assim, o que deve ser assegurado a esse trabalho são as aplicações da Trigonometria na

resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.

Huanca (2014) enfatiza a importância de saber modelar problemas, condição necessária à formação do aluno no sentido de que: ela desperta o interesse pela Matemática, leva a sentir sua beleza; melhora a busca pela construção de novos conceitos matemáticos; desenvolve a habilidade em resolver problemas; e estimula a criatividade nos alunos. Nesse sentido, programar a Resolução de Problemas como metodologia significou fazer Trigonometria ao modelar o problema do balão.

Lima (apud HUANCA, 2007) discute a trigonometria considerando esse tópico como um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações, que vão desde as mais elementares, no dia a dia, até as mais complexas, na ciência e na tecnologia, como pelo papel central que desempenham na Análise. O autor diz que uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, que existem em abundância no universo, como o movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Ainda HUANCA (2007) disse que, seguindo uma trajetória histórica foi possível encontrar um fio condutor para que a aprendizagem de conceitos trigonométricos acontecesse de forma significativa “bem natural”, ficando clara a necessidade de se trabalhar com os alunos. Primeiramente, as razões trigonométricas no triângulo retângulo, explorando a ideia de semelhança entre triângulos. Em seguida, inserir esse triângulo num lugar geométrico (a circunferência) que, posteriormente, seria definido como ciclo trigonométrico de raio unitário, explorando os conceitos trabalhados anteriormente no triângulo. Desta forma, aos poucos, define-se o ciclo trigonométrico e as razões trigonométricas estudadas que são inseridas nesse ciclo, sendo possível até determinar seus valores trigonométricos para arcos dos limites dos quadrantes, 0° ou 90° , quando já não existem mais triângulos.

Segundo Paiva (2004) a relação matemática, chamada lei dos senos, estabelece a existência de uma razão constante entre a medida de um lado qualquer do triângulo e o seno do ângulo oposto a este lado, ou seja, que esta razão é igual ao dobro do raio da circunferência circunscrita a este triângulo.

Então, temos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

Em que R é o raio da circunferência circunscrita no triângulo.

Paiva ainda disse que, em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.

Então temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Partindo disto, surge a necessidade de desenvolver um trabalho que esteja vinculado à realidade do aluno, para que este seja participante ativo e os problemas, instrumentos a serem trabalhados.

Metodologia

Levantamos a hipótese de que a resolução do problema do balão possibilitou a primeira autora atingir os objetivos quanto à aprendizagem de conhecimentos trigonométricos (conceituais, atitudinais e procedimentais), bem como desenvolver hábitos de estudo e de reflexão crítica.

Esta hipótese parte do princípio de que o ensino tradicional, geralmente praticado nas nossas escolas, baseado na transmissão de conhecimento por parte do professor não é adequada para responder as demandas educacionais atuais e, que esta realidade torna-se cada vez mais acentuada. Esta concepção, que trás subjacente o homem como um ser passivo, no qual a aprendizagem “ocorre por meio da ‘impressão’ dos conceitos estudados no seu cérebro, estabelece que o professor é o dono do saber, e portanto, o responsável para apresentar as definições, regras e teoremas já sistematizados e organizados” (BRIGHENTI, 2003, p. 31).

Entende-se ainda que esta maneira de conceber o processo de ensino-aprendizagem:

- Não leva em consideração os conhecimentos prévios do aluno e que são necessários para uma boa compreensão dos conceitos relativos à trigonometria, como circunferência, semelhança de triângulos, simetria e função;
- O ensino é feito de forma descontextualizada, não levando em conta a história e a aprendizagem em trigonometria, contribuições significativas às aplicações relevantes da trigonometria nos mais diversos campos da atividade humana.
- Não considera a realidade vivenciada pelo aluno durante a aprendizagem, quais sejam: falta de tempo para estudos extraclasse, utilização de livros textos e de metodologias,

experiências e domínios de conhecimentos distintos, baixa motivação e estima, entre outros.

Nesta direção, a primeira autora se propôs ao alcance e as limitações ao resolver o problema do balão que envolvia um conhecimento da trigonometria. Nesse sentido, tanto a primeira autora como o professor, desenvolveram estratégias para resolver o problema por caminhos distintos.

Com isto, a pesquisa é de cunho qualitativo, apresentando várias etapas para sua execução. Em primeiro lugar foi feita uma revisão bibliográfica visando fornecer subsídios para elaboração desse trabalho. Em seguida levantamos os dados, ou seja, as resoluções do problema para serem analisados. Por fim, apresentamos os resultados e discussão do problema.

Resultados e Discussão

Durante a aula de Matemática Básica II do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB, campus Monteiro-PB, o professor aplicou uma lista de questões em sala de aula. No entanto, nenhum dos alunos conseguiu chegar à resolução de imediato na questão, que chamamos de “o problema do balão”, pois apresentou certa complexidade, sendo necessária muita reflexão e uso de programas visuais, desenhos e até a tentativa de modelar um material concreto feito de papelão (o qual não apresentamos nesse trabalho) para usar como ferramentas auxiliares em busca da compreensão e apontamentos para métodos de desenvolver a solução.

A particular dificuldade em solucionar o problema motivou a autora a buscar o desenvolvimento da questão e, com o apoio do professor, produzir este artigo, visto que esta atitude proporcionaria uma melhor compreensão do assunto, uma melhor formação, uma grande satisfação em se aventurar em algo desconhecido, e uma agradável confiança que seria fácil desenvolver a solução, visto que o problema tem um enunciado bem simples.

A seguir, apresentamos o enunciado do problema.

O problema do balão: Um balão é visto simultaneamente de três estações, A, B e C sob ângulos de elevação de 45° , 45° e 60° , respectivamente. Sabendo que A está a 3 km a oeste de C e que B está 4 km ao norte de C. Qual a altura do balão?

Convidamos o leitor a tentar resolver o problema do balão antes de ver os resultados e discussão deste trabalho para que este venha a ter uma experiência previa de umas das resoluções do problema.

Começamos por representar as figuras para auxiliar na discussão e compreensão do problema do balão. Sabemos que $AC = 3, BC = 4$ de tal forma que o triângulo ABC é retângulo em C. Vamos considerar o ponto H a posição do balão; H' a sombra do balão no solo; e HH' será a altura do balão que tem comprimento de medida h .

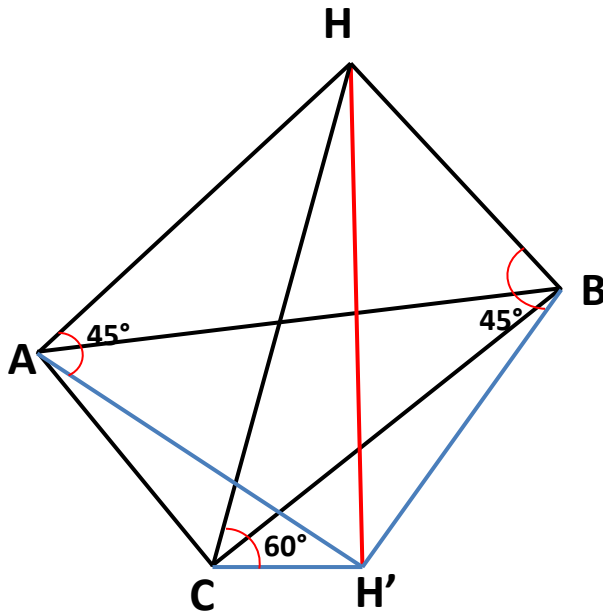


Figura 1 - Ponto H' exterior à ABC

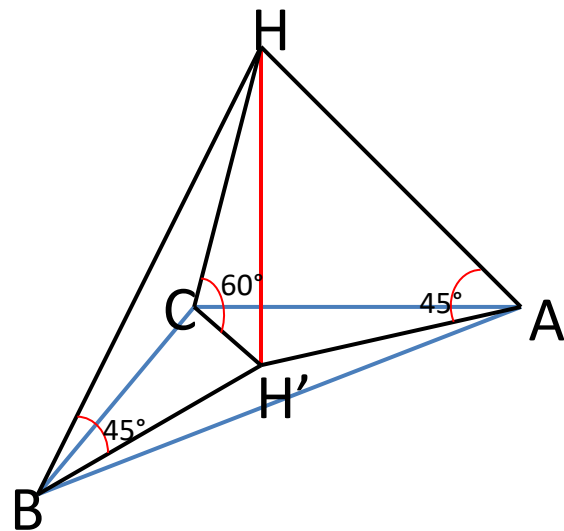


Figura 2 - Ponto H' interior à ABC

Podemos notar com as propriedades básicas de triângulos retângulos (somadas dos ângulos internos) e as definições de razões trigonométricas, que os triângulos $AH'H$ e $BH'H$ são isósceles de bases AH e BH , respectivamente, e $AH' = h; BH' = h; CH' = \frac{\sqrt{3}}{3}h; AH = \sqrt{2}h, BH = \sqrt{2}h, e CH = \frac{2\sqrt{3}h}{3}$.

Agora vamos considerar o triângulo ABC da figura 2. A partir dele, consideramos o ponto H' no interior do triângulo (O raciocínio para a figura 1 é análogo ao que está sendo desenvolvido).

Nesse sentido, sejam, x e y as alturas dos triângulos $BH'C$ e $AH'C$, respectivamente, relativas às bases BC e AC , também respectivamente. Então, utilizando o Teorema de Pítagoras, temos:

$$x^2 + (4 - y)^2 = h^2 \quad (1)$$

$$(3 - x)^2 + y^2 = h^2 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{h^2}{3} \quad (3)$$

Das duas primeiras equações segue:

$$6x - 8y = -7 \Rightarrow y = \frac{6x + 7}{8}$$

As equações (2) e (3), nos dão:

$$2x^2 + 2y^2 + 6x - 9 = 0$$

Substituindo $y = \frac{6x+7}{8}$ nesta última equação, temos:

$$2\left(x^2 + \left(\frac{6x+7}{8}\right)^2\right) + 6x - 9 = 0$$
$$100x^2 + 276x - 239 = 0 \quad (4)$$

Sendo (4) uma equação de 2º grau obtemos as soluções aproximadas,

$$x_1 = 0,692 \text{ e } x_2 = -3,452 \text{ (esse valor negativo tem relação com a solução)}$$

Desse modo, segue que

$$y_1 = 1,394 \text{ e } y_2 = -1,714 \text{ (mesmo caso do } x_2)$$

Podemos notar a relação $CH'^2 = x^2 + y^2$ (um triângulo retângulo de hipotenusa CH' e catetos medindo x e y). Logo,

$$CH'^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow CH' = \sqrt{0,692^2 + 1,394^2} \approx 1,55631$$

Assim, no triângulo $CH'H$, temos que:

$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{h}{CH'} \Rightarrow h = \sqrt{3} \cdot (1,55631) \approx 2,696.$$

Portanto, a altura do balão, no caso da figura 2, é, aproximadamente, 2696 metros.

A solução para o caso da figura 1, o raciocínio foi análogo, ou seja, em uma das tentativas em resolver o problema foi utilizado sistemas de coordenadas cartesianas para representar os pontos no espaço tridimensional. Sendo assim, os negativos encontrados da equação do 2º grau, x_2 e y_2 são parte da solução, quando consideramos o ponto H' fora do triângulo ABC.

Assim, a segunda solução seria,

$$CH'^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow CH' = \sqrt{(-3,452)^2 + (-1,714)^2} \approx 3,854102$$

Portanto, no triângulo $CH'H$, temos que

$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{h}{CH'} \Rightarrow h = \sqrt{3} \cdot (3,854102) \approx 6,676.$$

Logo, temos duas posições possíveis para o balão. Uma que fica a **2696 metros de altura** e outra que fica a **6676 metros de altura**.

Conclusões

A trigonometria se faz presente desde os primórdios da humanidade, sua importância faz com que a mesma seja cada vez mais necessária, pois, ajuda na construção do mundo e principalmente na sociedade na qual estamos inseridos. O problema do balão colocou a prova o nosso aprendizado em trigonometria e faz com que interpretemos a situação de maneira a transformá-la em algo que possa ser explicado.

Convém destacar que a autora deste trabalho tinha convicção que chegaria a resposta de imediato e que seria relativamente fácil. De fato, a solução é agradável de compreender. No entanto, várias tentativas foram feitas sem sucesso e o processo da resolução do problema do balão se tornou cansativo. Para isso, vários métodos foram abordados, e a paciência quase se esgotou. Por sorte, que não antes de uma última tentativa. O que apresentamos para o III Congresso Nacional de pesquisa e Ensino em Ciências foi à quinta tentativa. Gostaríamos que todos os interessados e pesquisadores na área de matemática resolvessem o problema pela lei dos senos e cossenos que infelizmente ainda não conseguimos.

Portanto, espera-se que este trabalho possa contribuir para que mais pessoas conheçam a importância da trigonometria, possibilitando utilizá-la em diferentes áreas do conhecimento, aperfeiçoando-se e construindo novas resoluções a partir desta.

Referências

BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1996, 496p.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC, 1998. 148p.

_____. Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002, 144p.

BRIGHENTI, M. J L. Representações gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos. Bauru, SP: EDUSC, 2003. 148p.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. Trigonometria, números complexos. Rio de Janeiro: IMPA/VITAL, 1992.

HUANCA, R. R. H. A Telha Ondulada: Resolução e Exploração de um problema trigonométrico. In: XI EBRAPEM - XI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Anais do XI EBRAPEM. Curitiba: Universidade Federal do Paraná - UFPR, 2007.

HUANCA, R. R. H. A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de Matemática. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP, 2014. 315 f.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. An Agenda for Action. Reston: NCTM, 1980. 29p.

_____. Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM, 2000. 402p.

_____. Normas Profissionais para o Ensino de Matemática. Tradução de Fernando Nunes. Lisboa: Associação de Professores de Matemática; Instituto Educacional, 2017.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap. 12, p.199-218.

PAIVA, M. Matemática-Ensino Médio. 1.ed. São Paulo: Moderna, 2004.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) New Directions for Elementary School Mathematics. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42 (Yearbook)

WALLE, J. A. V. Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally. 4^a ed. New York: Longman, 2001. 555p.