



# **TOPOLOGIA GEOMÉTRICA: UM ESTUDO DAS SUPERFÍCIES UNILATERAIS COMO FORMA DE CONTRIBUIÇÃO NA EXPLORAÇÃO DO ESPAÇO E PRÁTICA DA MEDIÇÃO**

Autor (1); Maria Gerrylane Pereira dos Santos; Co-autor (1); Northon Canevari Leme  
Penteado

*Universidade Federal do Cariri – [gerrylanesantos4@gmail.com](mailto:gerrylanesantos4@gmail.com)*

## **INTRODUÇÃO**

A discussão sobre o processo de ensino aprendizagem da matemática no contexto da educação básica envolve, também, a compreensão da complexidade que perpassa o ensino das suas diferentes áreas de conhecimento, tal como a Topologia/Geometria.

Assim, devido à dificuldade encontrada na aprendizagem dos alunos em determinados conceitos geométricos este trabalho se justifica através do estudo de superfícies unilaterais como forma de contribuição na exploração do espaço e prática da medição. Portanto, buscou-se estudar as informações com o propósito de responder ao seguinte problema de pesquisa: de que forma o estudo das superfícies unilaterais auxilia na aprendizagem dos alunos em Geometria?

O presente trabalho tem como objetivo principal explorar de que forma o estudo de superfícies unilaterais pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos alunos em Geometria como forma de contribuição na exploração do espaço e na prática da medição, com a finalidade de minimizar as dificuldades apresentadas e reconstruir conceitos.

Tendo em vista que esta pesquisa se encontra em fase inicial, apresentaremos o percurso metodológico que será realizado e no item seguinte uma discussão sobre o desenvolvimento da Topologia como área de estudo, bem como alguns apontamentos sobre o ensino desta no contexto escolar.

## **METODOLOGIA**

O presente estudo é de natureza quali-quantitativa e possui caráter exploratório, este, segundo Gil (2007, p. 44), tem como “[...]objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema com vistas a torna-los mais explícitos ou a constituir hipóteses”, possibilitando explorar as contribuições da Topologia para o processo educativo.

(83) 3322.3222  
[contato@epbem.com.br](mailto:contato@epbem.com.br)  
[www.epbem.com.br](http://www.epbem.com.br)



Este estudo será desenvolvido com uma turma de alunos do primeiro ano do ensino médio em uma escola estadual localizada na cidade de Abaiara-CE.

Realizaremos uma abordagem teórica sobre o tema, discutindo com os alunos sobre o surgimento de tal ciência, bem como suas aplicações, também, presentes no cotidiano. Nesse momento de apresentação do tema, utilizaremos alguns recursos didáticos, como o elástico e folhas de papel, buscando discutir com os alunos os aspectos históricos, introdução ao conhecimento de Topologia, atividades lúdicas, transformações topológicas, exemplos de estruturas topológicas e diversas noções inerentes à Topologia.

Posteriormente será realizada com os alunos uma oficina pedagógica utilizando recursos manipulativos construídos com material de baixo custo e de fácil acesso onde serão trabalhadas com as superfícies unilaterais, que serão construídas pelos próprios alunos, auxiliando assim na prática de medidas. No final será aplicado um questionário para saber as opiniões dos alunos sobre seus conhecimentos adquiridos e as atividades realizadas.

## **RESULTADOS E DISCUSSÕES**

Grande parte dos conhecimentos geométricos apresentados na escola atualmente são bastante antigos. Por exemplo, por volta de 300 a.C. já vinha sendo estudado os círculos, quadrados e triângulos por Euclides de Alexandria, grande matemático que na obra “Elementos” reuniu diversos conhecimentos geométricos, até hoje utilizados como referência na Geometria Euclidiana. Normalmente descreve-se o espaço ao nosso redor com base em formas geométricas regulares. Mas, por exemplo, uma montanha não é um cone e nem o planeta Terra é uma esfera perfeita. Geometricamente, a natureza se comporta de uma maneira que não é totalmente explicada pela Geometria que estudamos no ambiente escolar, a chamada Geometria Euclidiana.

Existem comportamentos que fogem bastante da geometria euclidiana e que foram objetos de estudo de vários pesquisadores, no século XIX, como Nikolai Ivanovich Lobachevski (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que resolveram investigar o que aconteceria se eles alterassem o quinto postulado de Euclides. Fazendo isso descobriu que estavam surgindo outro tipo de Geometria a qual fugia dos padrões da Geometria de Euclides, as geometrias não euclidianas.

A Topologia é um tipo de geometria não euclidiana. Ela é um dos ramos mais recentes da Matemática que estuda as propriedades qualitativas



de certos objetos chamados espaços topológicos, sendo também considerada uma extensão da geometria. Tem como objetivo estudar a estrutura dos objetos sem preocupação com seu tamanho ou formato, assim como a geometria euclidiana. Stewart acrescenta que, Topologia:

(...) É a geometria das formas que podem ser deformadas ou distorcidas de maneiras extremamente rebuscadas. Retas podem se dobrar, encolher ou esticar; círculos podem se deformar a ponto de se transformarem em quadrados ou triângulos. Aqui, o que importa é a continuidade. As transformações permitidas em topologia precisam ser contínuas no sentido da análise; grosso modo, significa que se dois pontos começam suficientemente próximos, acabam próximos – daí a imagem da "folha de borracha". (STEWART, 2014, pág. 185, grifo do autor)

O estudo de Topologia aparece indiretamente nos currículos da matemática da educação básica, de modo que o estudante pode concluir que a Geometria Euclidiana é a única geometria possível. Espaços topológicos aparecem naturalmente em quase todos os ramos da matemática. Isso fez da Topologia uma das grandes ideias unificadoras da matemática e que de alguma forma é uma ciência que faz parte da realidade dos alunos.

A Topologia utiliza os mesmos objetos que a Geometria, com a seguinte diferença: não interessa a distância, os ângulos nem a configuração dos pontos. Na Topologia, objetos que possam transformar-se em outros, através de funções contínuas reversíveis, são equivalentes e indistinguíveis. Por exemplo, círculos e elipses, esferas e paralelepípedos. (VILCHES, 2012, pág. 03)

A diferença é que a Geometria descreve matematicamente uma figura, ou seja, se preocupa com aspectos quantitativos, enquanto a Topologia analisa as possibilidades das figuras de forma mais qualitativa. Ela imagina os objetos como se fossem de borracha podendo drasticamente serem modificados.

Existem problemas clássicos que contribuíram bastante para o nascimento da topologia, entre eles, o Mapa das Quatro Cores, o problema das Sete Pontes de Königsberg e as Superfícies Unilaterais que são superfícies que possuem apenas um lado, por exemplo a faixa de Möebius e garrafa de Klein. A faixa de Möebius ou fita de Möebius é uma superfície importante para a Topologia, descoberta pelo matemático Augustus Ferdinand Möebius (1790-1868), Leivas e Silva (2013, pág. 06) comentam que “para verificar sua unilateralidade basta percorrer toda ela com um lápis sem o levantar do papel e iremos ver que conseguimos realizar todo o percurso sem enfrentar nenhuma fronteira. Esse procedimento ilustra de forma intuitiva a relação topológica de continuidade”. A garrafa de Klein foi inventada pelo matemático Félix Klein (1849-1925). As duas estão inteiramente relacionadas, pois ao cortar a garrafa de Klein ao meio obteremos duas faixas de Möebius. Com a utilização dessas superfícies podemos realizar diversas atividades práticas com os alunos de forma que



possamos trabalhar tanto os conceitos geométricos como praticar medições durante sua construção.

Rodrigues (2011, p. 93) afirma que: “Atividades envolvendo conceitos da topologia ou geometria das transformações despertam o interesse dos educandos, sendo uma forma de mostrar que a geometria euclidiana não é a única geometria possível”.

Como a Topologia trata de propriedades que permanecem inalterantes em face da transformação contínua do objeto, não é de surpreender que o campo de ação da “mágica topológica”, se limite, quase por completo, a materiais flexíveis tais como papel, tecido, fio, corda e elásticos. (PERES; MOREIRA, 2011, pág.92, grifo do autor)

As práticas pedagógicas de investigações matemáticas têm sido cada vez mais recomendadas por diversos estudiosos como forma de contribuir para uma melhor compreensão da matemática.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Objetivo desse trabalho é apontar de que forma o estudo de superfícies unilaterais pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos alunos em Geometria, com a finalidade minimizar as dificuldades apresentadas e reconstruir conceitos, tornando-os participantes de um ambiente de aprendizagem significativa.

A partir das discussões realizadas pretende-se por meio desse trabalho proporcionar aos alunos do Ensino Médio, noções básicas sobre Topologia, apresentando de forma compreensiva, fazendo com que sejam resgatadas pelos alunos de Ensino Médio, a visualização, a representação e a interpretação geométrica, buscando proporcionar o entendimento desses conhecimentos e a correlação com os conteúdos de sala de aula, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio e habilidades dos alunos, além da criatividade utilizando-se dessas informações para facilitar relações com as outras áreas da matemática e diferentes áreas do conhecimento.

Para tanto a Topologia será mostrada, de modo acessível, por meio de imagens e atividades práticas relacionadas com alguns aspectos possíveis de serem visualizados, buscando trabalhar com alguns problemas clássicos da topologia, especificamente superfícies unilaterais, utilizando folhas de papel para construção das mesmas como forma de auxílio no processo de ensino e aprendizagem de Geometria do ensino Médio, principalmente no entendimento de Topologia, e o senso crítico a respeito da Geometria.



Nas atividades a serem realizadas busca-se viabilizar o desenvolvimento lógico dos alunos em determinados tipos de problemas, valorizando as atividades de resolução de problemas por meio de questões investigativas e históricas.

## REFERÊNCIAS

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

LEIVAS, José Carlos Pinto, SILVA, Eirilúcia Souza da. **Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica**. I CEMACYC, Santo Domingo, República Dominicana, 2013. Disponível em: <<http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/201-380-1-DR-C.pdf>> Acesso em: 26.05.2018.

PERES, Camila Araújo; MOREIRA, Luiz Guilherme Pantoja **Recreações Topológicas**. 2011. 187 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011. Disponível em: < <http://doczz.com.br/doc/130501/camila-ara%C3%BAjo-peres-luiz-guilherme-pantoja-moreir> > Acesso em: 27.05.2018.

RODRIGUES, Georges Cherry,. **Introdução Ao Estudo De Geometria Espacial Pelos Caminhos Da Arte E Por Meio De Recursos Computacionais**. 2011,143 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2011. Disponível em: < [http://www.bc.furb.br/docs/DS/2011/348306\\_1\\_1.PDF](http://www.bc.furb.br/docs/DS/2011/348306_1_1.PDF)>. Acesso em: 25.05.2018

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Editora Zahar, 384 p. 2014.

VILCHES, Mauricio A. **Topologia Geral**. Departamento de Análise – IME-UERJ, 2012, Rio de Janeiro. Disponível em: < <https://pt.scribd.com/doc/291223291/Topologia-Geral-Mauricio-a-Vilches-UERJ>>. Acesso em: 02.05. 2018