VI CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS

TOPOLOGIA INTUITIVA: UMA PROPOSTA DE INSERÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Luis Alberto Sciencia Silva de Lima [1]
Emanuela Régia de Sousa Coelho [2]

RESUMO

A Topologia, como ramo da Matemática, caracteriza-se como área que estuda propriedades de figuras que não variam com determinadas transformações, como por exemplo, deformações. Embora conceitos topológicos apareçam em diversas outras áreas da Matemática, a Topologia não é tradicionalmente abordada nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, tampouco aparece nos currículos da Educação Básica. Mesmo sendo uma área abstrata, algumas ideias topológicas admitem um apelo visual e intuitivo que nos permite vislumbrar uma introdução de determinados objetos em salas de aula, desde o nível básico. Neste trabalho, apresentamos alguns conceitos básicos da Topologia, e dessas transformações entre espaços topológicos, através de uma abordagem intuitiva, além de sugerirmos uma sequência de atividades que visam introduzir algumas dessas ideias na Educação Básica, de modo que se atenda a Competências e Habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC.

Palavras-chave: Topologia. Noção Intuitiva. Ensino de Matemática.

INTRODUÇÃO

A Topologia é uma área de estudo que trata, basicamente, de figuras geométricas abstratas e propriedades relativas à transformações, incluindo deformações, dessas figuras. Como área de estudo, os conceitos e resultados da topologia são de cunho exclusivamente abstratos, como grande parte das áreas de pesquisa em Matemática. Porém, como os objetos de estudo dessa área podem ser considerados como figuras geométricas, podemos - em alguns casos - abordar tais conceitos abstratos a partir de ideias intuitivas e figuras conhecidas.

Nosso trabalho[3] trata de fazer esse estudo introdutório de alguns conceitos topológicos, a partir de uma abordagem intuitiva e indicar possibilidades de introduzir essas ideias na Educação Básica, de modo a atender Competências e Habilidades indicadas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017). Além disso,

1 Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – PB, luis.lima@aluno.uepb.edu.br;
2 Professora Orientadora: Doutora em Matemática, Universidade Estadual da Paraíba – PB, emanuelacoelho@servidor.uepb.edu.br ;
3 Essa pesquisa é fruto do Projeto Intitulado Topologia Intuitiva e relações com o Ensino de Matemática, vinculado ao Programa de Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Estadual da Paraíba (PIBIC- UEPB/CNPq), cota 2020-2021.

apresentamos uma proposta formada por um grupo de atividades a serem desenvolvidas em turmas do Ensino Médio com o tema abordado.

Entendemos que o estudo de Topologia na Educação Básica busca promover o desenvolvimento de competências e habilidades usufruindo das propriedades visuais da Topologia, além de iniciar o estudante em conceitos matemáticos relevantes para estudos matemáticos mais avançados como equações diferenciais, sistemas dinâmicos e análise matemática . (University of Waterloo, 2020). Alguns autores, como Esquincalha (2020), Borges (2005), Ferron (2017), Rissi e Franco (2009), entre outros, estudaram algumas possibilidades de inserção de conceitos topológicos na educação básica, sempre partindo do apelo visual e intuitivo que os temas permitem.

Nessa direção, o estudo de alguns conceitos topológicos podem trazer benefícios ao aprendizado de estudantes em diversos níveis de ensino, em particular, na Educação Básica, o estudo de Topologia se alinha a competências e habilidades abordadas pela BNCC no Ensino Médio, as quais estão listadas a seguir.

Atendendo à COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1 da BNCC, a Topologia demanda o uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações ao trabalhar com a ideia de transformações em topologia, e à habilidade EM13MAT105 o estudo de Topologia demanda a capacidade de utilizar as noções de transformações isométricas o lidar com as noções de transformações homeomórficas.

Já a COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 e a Topologia se conversam com relação à capacidade de entender e criar uma estratégia para transformações topológicas no estudo Nós, e a habilidade EM13MAT315 é explorada no estudo de Topologia já que o uso de algoritmo pode ser fundamental para registro ou desenvolvimento de técnicas para transformações topológicas.

Por fim, para a COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5 a Topologia exige o emprego de estratégias, observação de padrões e experimentação que são fundamentais no planejamento para realizar as transformações topológicas.

Na sequência, apresentamos alguns dos temas estudados, dando uma breve descrição de cada tópico.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Topologia estuda propriedades de objetos geométricos que não se alteram após transformações nesses objetos, chamadas de transformações homeomórficas e deformações. Essas transformações também podem ser resumidas em esticar, dobrar, torcer e comprimir um objeto, mas não se pode perfurar, romper ou fazer auto-interceptação com o objeto (Prasolov, 1995). Neste artigo vamos estudar as Deformações e os Nós e Enlaces, intuitivamente, entendendo o que são e para que servem e estudar os conceitos necessários para compreender esses tópicos. Para a construção desta seção, seguimos as ideias contidas em Prasolov (1995).

As propriedades pertencentes ao estudo da topologia podem ser condições de contagem, conectividade, compacidade, metrizabilidade e outros. No entanto, devido à proposta de intuitividade, este trabalho se limita a observar o número de buracos que um objeto contém para simplificar e traduzir o que será chamado de propriedade topológica. Ou seja, a Topologia é uma área que trabalha uma parte visual e tangível da matemática permitindo a exploração de conceitos exóticos para Ensino Básico e atrativos para os estudantes.

Na próxima seção apresentamos uma sequência de atividades que podem ser desenvolvidas para introduzir os conceitos topológicos em turmas da Educação Básica. Ao listar as atividades, introduzimos também os conceitos necessários e comentamos acerca das reações esperadas dos estudantes e os direcionamentos possíveis dos professores.

Proposta de Sequência de Atividades

Uma vez introduzidos os conceitos a serem estudados, apresentamos aqui uma sequência de atividades a serem realizadas com os temas abordados. Nossa proposta consiste em 4 aulas de 50 minutos cada para alunos do ensino médio. Os encontros serão divididas de acordo com os seguintes temas:

1. ***Introdução à topologia***. Em que serão introduzidas as ideias gerais sobre topologia e suas aplicações em matemática avançada e outras áreas da ciência.
2. ***Deformações***. A aula será iniciada com a exposição das regras seguidas para manter as propriedades topológicas de um objeto. Após, propõe-se alguns problemas envolvendo os conceitos utilizados.
3. ***Nós.*** Começando conceituando o que são nós e como identificá-los. Então, apresenta-se os nós mais simples (Nó de Trevo e Figura Oito), reforçando como eles podem ser identificados e propondo problemas diversos.
4. ***Enlaces.*** Inicia-se a aula com a definição de enlace, associando a nós. Daí, apresenta-se os Enlace de Hopf e os Anéis de Borromeu. A finalização do estudo de enlaces será por meio da aplicação de um Problema.

Primeira aula - Introdução a Topologia

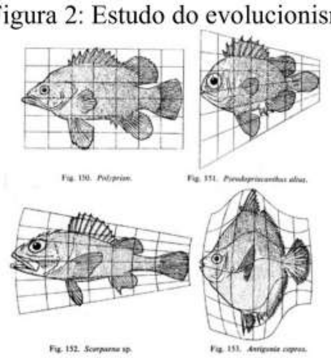
Nessa aula, nossa proposta é apresentar os conceitos gerais sobre topologia e dar uma ideia das aplicações de topologia em áreas avançadas da ciência. O objetivo é despertar o interesse e curiosidade dos estudantes mostrando, por meio dos exemplos de aplicação, o quão significativo, e, por meio dos exemplos visuais dados nesta aula, o quão simples e tangível a topologia é.

As aplicações de topologia são encontradas em desenvolvimento de jogos, robótica, biologia, engenharias, sistemas de informação geográfica e vários outros (Mishra, 2018). O que nos dá uma ideia da amplitude das possibilidades dessa área de estudo e mostra para os estudantes afeiçoados com variados assuntos como é possível usufruir da topologia. Na Figura 1 temos um exemplo de imagem gráfica para jogo eletrônico desenvolvida com forte aplicação dos conceitos de topologia para padronizar, justificar e manter a coerência das formas. Já na Figura 2 temos um exemplo de aplicação em biologia em que são estudados as semelhanças que os diferentes tipos de peixe têm entre si, com base em algumas características podemos saber que um peixe é um peixe e um peixe não é um gato. Parte dessas características podemos chamar de propriedades topológicas.

Figura 1: Desenvolvimento de imagens gráficas

Fonte: RIOT Games

Figura 2: Estudo do evolucionismo



Fonte: Thompson, 1997

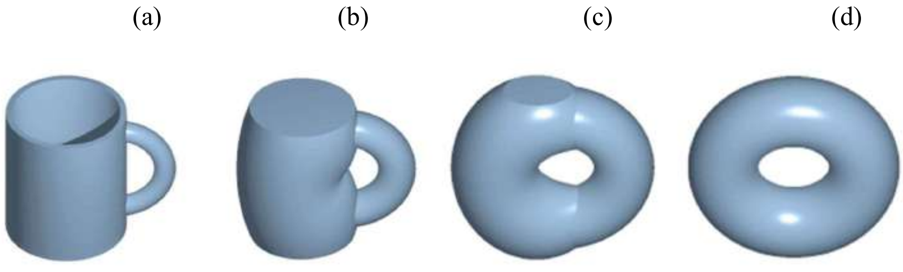
Mas o que são as propriedades topológicas? Peixes e gatos têm estruturas muito complexas e muito detalhadas para estudarmos aqui, então para entendermos o que são as propriedades topológicas que nos interessam neste curso vamos usar uma caneca e uma rosquinha. Sabemos que uma caneca e uma rosquinha têm um furo ou um buraco cada, então, por terem apenas um buraco, sabemos que uma caneca pode ser transformada em uma rosquinha e vice-versa. E você pode pensar "a caneca tem o buraco que seguramos e o buraco em que colocamos a bebida", no entanto onde colocamos a bebida não é vazado, ou seja, não passa para o outro lado, daí não é considerado um buraco. Assim, vamos nos limitar a chamar de propriedades topológicas o número de buracos vazados de um objeto.

Figura 3: Caneca e rosquinha

Fonte: https://i.stack.imgur.com/qa0Ja.jpg

Sim, podemos transformar uma caneca em uma rosquinha e o objeto mantém suas propriedades topológicas. Este momento da aula, antes de o professor dar a explicação, é um importante exercício para os estudantes refletirem, raciocinarem e tentarem buscar uma solução. Na Figura 4 (a) temos a nossa caneca, no passo (b) esticamos a caneca para preencher a parte onde vai o líquido, no passo (c) esticamos e torcemos o objeto para começar a dar a forma de uma rosquinha e, por fim, no passo (d) chegamos na rosquinha.

Figura 4: De caneca a rosquinha



Fonte: https://i.stack.imgur.com/qa0Ja.jpg

Assim, neste curso nós vamos basicamente esticar e torcer objetos e estudar quais formas podemos obter mantendo as propriedades topológicas desses objetos. Vamos encarar desafios maiores com o decorrer dos encontros e após dominarmos os conceitos de topologia.

Segunda aula - Deformações

Na segunda aula, iniciamos citando o exercício na aula anterior sobre transformar a caneca em rosquinha e nos referindo a essa transformação como deformação. É interessante reforçar os termos "esticar" e "torcer", pois serão parte dos conceitos principais desta aula que discorrerá sobre o que é deformação em topologia e quais as regras que devem ser seguidas para realizar essas deformações de modo a manter as propriedades topológicas do objeto.

Deformações em topologia são transformações que alteram a aparência de um objeto, mas mantêm suas propriedades topológicas permitindo que o objeto possa ser deformado novamente à sua forma inicial. Para que esses requisitos sejam atendidos, as seguintes regras devem ser seguidas, as quais classificamos em Pode e Não-Pode.

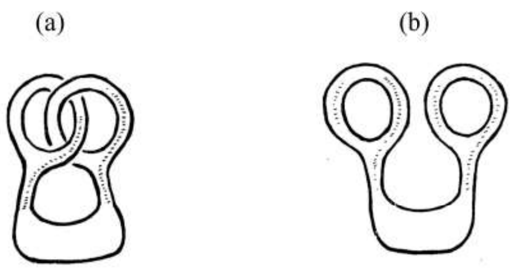
Pode: Esticar; Dobrar; Torcer; Comprimir.

Não-Pode: Perfurar; Romper; Auto-interceptar.

Ou seja, ao deformar um objeto podemos aumentar a distância entre pontos do objeto, dobrar unindo pontos e os pontos entre eles, torcer alterando a posição de pontos e comprimir diminuindo a distância entre pontos, mas todas essas ações não podem perfurar aumentando o número de buracos do objeto, romper desconectando a ligação ou diminuir o número de buracos ou auto-interceptar passando o objeto por ele mesmo.

Para entender melhor como deformar um objeto seguindo as regras vamos pensar em como sair da Figura 5 (a) e chegar em (b), quer dizer, como separar as argolas que estão unidas esticando, dobrando, torcendo e comprimindo, mas sem perfurar, romper ou auto-interceptar. Nesse momento, podemos dar um tempo para os estudantes discutirem e exercitarem o que aprenderam para reforçar o aprendizado, cabe ao professor orientar o estudante em qual ponto ele pode estar errado e incentivar em qual está correto. Por fim, se alguma solução correta for apresentada por um estudante a explicamos para os demais, senão damos a seguinte solução.

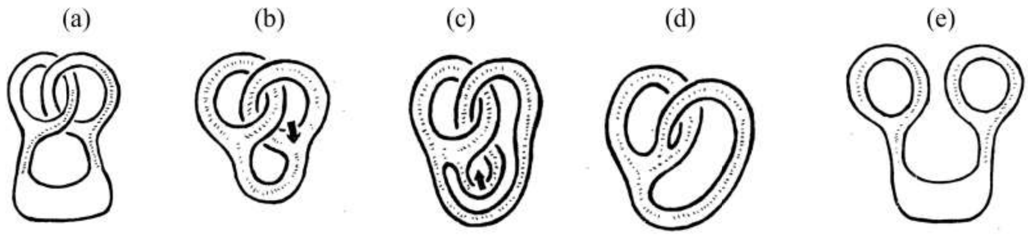
Figura 5: Aplicação de deformação



Fonte: Prazolov, 1995

Uma solução possível para este problema é a observada na Figura 6. Partimos de (a). Na figura (b), começamos a esticar partindo do ponto com a seta para a direção em que ela aponta, para aumentar o buraco da direita de modo a chegarmos na figura (c). Ao chegar em (c), temos duas argolas com a da direita bem grande, daí puxamos para cima aquela parte com a seta para cima, passando por dentro da argola da esquerda e chegamos em (d). Na figura (d), já temos as argolas separadas, bastando apenas esticar o corpo que une as duas argolas para obtermos a figura (e).

Figura 6: Exercício de deformação



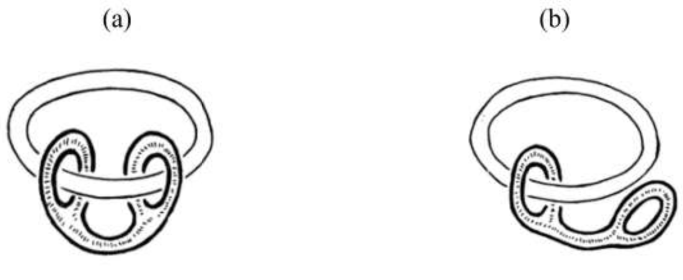
Fonte: Prazolov, 1995

Aqui é importante notarmos que, durante todo o processo de resolução, fizemos apenas o que está descrito nas regras e também mantivemos o objeto com apenas dois buracos, sem aumentar nem diminuir. Logo, deformamos um objeto mantendo suas propriedades topológicas.

Agora, para fixarmos o que estudamos, vamos resolver o Problema 1.

Problema 1: Uma algema de material elástico tem dois buracos presos em uma argola (como na Figura 7 (a)). Mostre como a algema pode ser deformado de modo que um dos seus buracos fique solto da argola (como na Figura 7 (b)).

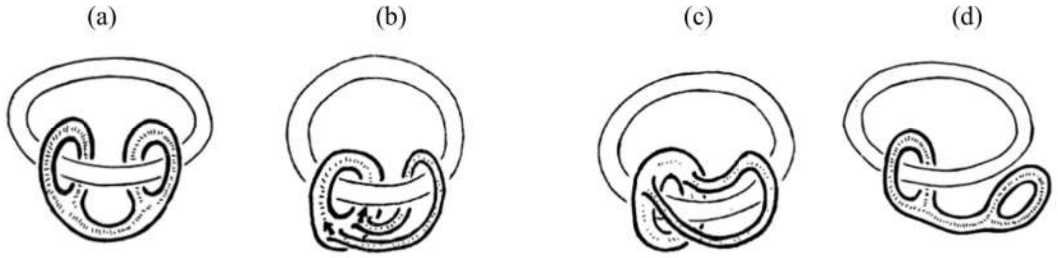
Figura 7: Algema na argola



Fonte: Prasolov, 1995

Solução: Para resolver esse exercício, seguimos os passos descritos na Figura 8. Começando em (a), esticamos o buraco à direita da algema até chegar no buraco à esquerda. Chegamos em (b), daí puxamos o buraco à direita que ficou bem maior para cima ao longo do buraco à esquerda até chegarmos em (c). Daí, deformamos o buraco à direita para voltar a sua aparência inicial, ou seja, com o formato de algema (d), mas com um buraco solto da argola.

Figura 8: Solução (Algema na argola)



Fonte: Prasolov, 1995

Aqui é importante que os estudantes resolvam este Problema sozinhos, mas o professor pode eventualmente ajudá-los. Com isso, concluímos esta etapa da proposta.

Terceira aula - Nós

Neste terceiro momento vamos discutir o que são os Nós em topologia, como identificá-los e exercitar com nós o que já aprendemos sobre topologia. A definição mais resumida que podemos dar de um nó em topologia é de que um nó é uma linha com suas extremidades conectadas.

Se considerarmos que um nó é uma linha com extremidades conectadas, ou seja, uma linha sem pontas, precisamos definir o que difere um nó de outro. Na Figura 9 temos o Nó de Trevo, um dos nós mais simples que existe. Esse nó é característico por ter três auto-cruzamentos e é esse número de auto-cruzamentos que define um nó. Além disso, percebemos que o nó é uma linha que não tem pontas, não tem extremidades, como definimos anteriormente. Já na Figura 10 temos o nó chamado de Figura Oito, pois ele pode ter esse formato que lembra o número oito. A Figura Oito é um nó que tem quatro auto-cruzamentos.

Figura 9: Nó de Trevo

Fonte: Prasolov, 1995

Figura 10: Figura Oito

Fonte: Prasolov, 1995

Problema 2: Nosso exercício é deformar o símbolo de infinito em um círculo simples. Ou seja, sair da Figura 11 (a) e chegar à Figura 11 (b).

Figura 11: Infinito em círculo

(a) (b)

Fonte: https://www.pngegg.com/en/search?q=infinity+symbol

Solução: Para realizarmos essa deformação, basta torcermos o símbolo de infinito e o que parece um auto-cruzamento desaparecerá, chegando no círculo.

O círculo que nós obtemos também é um nó, nós o chamamos de *Unknot* ou Nó Trivial em português, porque ele é o único nó com exatamente zero auto-cruzamentos.

Agora, vamos resolver o Problema 3 que é um pouco mais complexo.

Problema 3: Mostrar que a Figura 12 (a) pode ser deformada de modo a ficar como a Figura 12 (b), ou seja, como o Nó de Trevo.

Figura 12: Deformar Nó de Trevo

(a) (b)

Fonte: Prasolov, 1995

Solução: Apesar de parecer mais complexo que o Problema 2 por ter mais curvas, a ideia de solução é muito similar. Basta pegarmos a "folha" da parte de cima do trevo e torcê-la, removendo o falso auto-cruzamento no meio da figura.

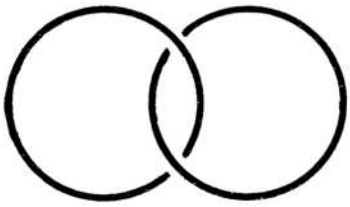
É relevante para esse exercício que os estudantes busquem a solução por eles próprios, comparando com o exercício anterior. Cabe ao professor auxiliar na busca e dar a solução apenas caso ninguém consiga obter sozinho, encerrando a terceira aula.

Quarta aula - Enlaces

Nesta quarta e última aula vamos entender e trabalhar os enlaces em topologia. Enlaces são nada mais do que a união de nós, podemos dizer que um nó é um enlace de um único nó. Vejamos alguns exemplos.

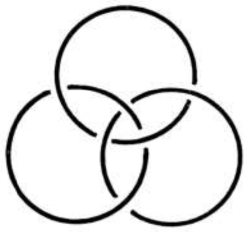
Na Figura 13 podemos ver o Enlace de Hopf. Percebemos que ele é a união de dois Nós Triviais, aquele nó com zero auto-cruzamentos. Além disso, os nós estão unidos e não podem ser separados a menos que façamos um corte em algum deles. Já na Figura 14 vemos os Anéis de Borromeu que é composto por três Nós Triviais. E se observarmos dois a dois os anéis não estão unidos, ou seja, a união que forma os Anéis de Borromeu só é possível com os três anéis. O que nos leva aos Problemas 4 e 5.

Figura 13: Enlace de Hopf



Fonte: Prasolov, 1995

Figura 14: Anéis de Borromeu



Fonte: Prasolov, 1995

O Problema 4, por permitir a quebra das regras de deformação estabelecidas em aulas anteriores, leva o aluno a relembrar quais regras são essas, além de explorar os Anéis de Borromeu.

Problema 4: Explicar o que acontece com os Anéis de Borromeu se um dos anéis for removido.

Observação: Essa remoção pode ser realizada quebrando as regras de deformação estabelecidas.

Solução: Como nos Anéis de Borromeu os anéis não estão unidos dois a dois, se removermos um dos anéis cortando-o os outros dois que sobram se separarão.

O Problema 5 se assemelha ao Problema 4 e permite ao estudante recordar as características do Enlace de Hopf enquanto trabalha com os Anéis de Borromeu.

Problema 5: Explicar o que acontece com os Anéis de Borromeu se dois dos anéis forem unidos dois a dois (como é o Enlace de Hopf).

Observação: Essa remoção pode ser realizada quebrando as regras de deformação estabelecidas.

Solução: Se realizarmos um corte em um dos anéis e o colarmos de modo que dois dos anéis ficassem unidos como o Enlace de Hopf, então o terceiro anel se soltará, restando apenas um Enlace de Hopf e um Nó Trivial.

Para finalizar, relembramos o que aprendemos sobre Topologia, Deformações, Nós e Enlaces. Com isso, concluímos nossa quarta e última aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de Topologia no Ensino Básico tem muito a colaborar com o desenvolvimento dos estudantes, explorando competências e habilidades previstas na BNCC. Embora seja uma área de pesquisa abstrata em Matemática, os conceitos aqui abordados possuem um apelo visual e intuitivo bastante propício para serem introduzidos o quanto antes aos nossos alunos. Além disso, os Problemas propostos oferecem também a possibilidade de serem apresentados a partir de materiais manipuláveis como barbantes, para atividades com nós e enlaces, por exemplo, e massa de modelar, para objetos em outras dimensões. Em níveis mais avançados, podemos utilizar softwares de edição de imagens para tratar de temas mais complexos. As propostas de atividades aqui apresentadas são sugestões introdutórias do tema e servem de embasamento para o professor que deseje adotá-lo como intervenção em suas aulas. Além disso, os tópicos abordados neste artigo são fundamentais para o estudo mais avançado de topologia e outras áreas da matemática, assim nosso trabalho em si promove ainda uma introdução intuitiva a conceitos muito úteis no estudo de matemática.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Bolsas de Iniciação Científica PIBIC - UEPB/CNPq pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

BORGES, C. C.,**A Topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino da Matemática.** Caderno de Física da UEFS. v. 3, n. 2, pp. 15-36, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

ESQUINCALHA, A.C. **Tópicos em Topologia Intuitiva**. Disponível em: <http://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/artigo7_volume7.pdf> Acesso em: 06 de junho de 2020.

FERRON, N. **An Introduction to Topology for the High School Student**. 2017. Disponível em <https://collected.jcu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1075&context=mastersessays> Acesso em: 07 de junho de 2021

PRASOLOV, V. V. **Intuitive Topology.** Hyderguda, Universities Press, 1995.

RISSI, M. R.; FRANCO, V. S., Topologia: Uma proposta Metodológica para o Ensino Fundamental. 2009. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2210-8.pdf> Acesso em: 07 de junho de 2020.

What is Topology? **University of Waterloo: Department of Pure Mathematics,** 2020. Disponível em: < https://uwaterloo.ca/pure-mathematics/about-pure-math/what-is-pure-math/what-is-topology >. Acesso em 17 de Julho de 2021.

MISHRA, S.; AALIYA, M. **Applications of Topology in Science and Technology**. Department of Mathematics, Lovely Professional University. 2018. Disponível em : <https://www.researchgate.net/publication/343635292_Applications_of_Topology_in_Science_and_Technology>. Acesso em 17 de Julho de 2021.

THOMPSON, D.W. **On Growth and Form**. Cambridge, UK: University Press. 1997