



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

CARACTERIZAÇÃO DO CONHECIMENTO COMBINATÓRIO DOS ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Mireli Morais de Oliveira¹; Isnara Mendes Lins²

¹Universidade Federal de Campina Grande-UFCG, mireli_morais@hotmail.com

²Universidade Estadual da Paraíba –UEPB, isnara_cz@hotmail.com

Resumo: O presente artigo tem o propósito de apresentar os resultados de uma pesquisa concluída na área de Educação Matemática, essa pesquisa investiga o conhecimento que os alunos das séries finais do Ensino Médio detêm sobre o conteúdo de Análise Combinatória. Este conteúdo foi escolhido por ser considerado de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico, interpretação, compreensão e elaboração de estratégias para resolver problemas. O referencial que embasa este trabalho é a teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud, que é uma teoria cognitivista que busca verificar a relação entre o desenvolvimento cognitivo de uma maneira geral e os processos de aprendizagem de conceitos e conteúdos específicos, mediante a presença de um tripé que dá sustentação a esse processo: a situação, a representação e os invariantes. A pesquisa foi desenvolvida junto a uma turma da 3º ano do ensino médio, em uma escola pública de ensino regular localizada no sertão do estado da Paraíba. Os alunos responderam dois questionários e um pré-teste. Os professores também responderam uma entrevista. Este estudo aponta que a maioria dos discentes concluem a Educação Básica sem ter nenhum contato com assunto de Análise Combinatória, mas conseguem responder algumas questões com o uso do raciocínio lógico. Constatamos também, a necessidade de trabalhar esse assunto desde as séries iniciais, para que haja um desenvolvimento gradativo dos esquemas relacionados às estruturas multiplicativas.

Palavras-Chave: Análise Combinatória, Aprendizagem e Campos Conceituais.

1. INTRODUÇÃO

O conteúdo de Análise Combinatória é muito importante no currículo do ensino médio e na maioria das vezes é transmitido de maneira linear, com ênfase na mera utilização de fórmulas, sem haver correlações com as situações problemas do dia-a-dia dos alunos. Muitas vezes tal conteúdo não é ministrado desde as séries iniciais até o ensino Médio, sendo que essa realidade não é restrita apenas ao Brasil. Em outros países há relatos de que a Análise Combinatória é considerada um conteúdo muito difícil pelos professores, e que na maioria das vezes por ser um assunto complicado eles ignoram os seus ensinamentos.

Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem que a contagem permita uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório, a contagem dos casos possíveis não deve ser apreendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. Em vista disso, nos propomos a realizar uma pesquisa voltada a análise do raciocínio



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

combinatório dos alunos do 3º ano do Ensino Médio, a fim de investigar se eles chegam nessa fase final do ensino básico com algum conhecimento desenvolvido a respeito desse conteúdo.

O assunto foi escolhido por considerar que o mesmo é de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico, interpretação, compreensão e elaboração de estratégias para resolver problemas.

Em busca de compreender e identificar os esquemas acerca do conhecimento e Análise Combinatória usou a teoria a teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud, pois é através dos esquemas utilizados pelos alunos, que podemos pesquisar os conhecimentos em ação, além de descrever e compreender os processos de resolução de problemas. Vergnaud considera que o desenvolvimento cognitivo se deve, ao desenvolvimento de um grande conjunto de esquemas.

Assim é nessa interação esquema-situação, que o aluno ao se deparar com uma situação, ou seja, um problema precisará buscar um de seus esquemas para resolvê-la, quanto maior a gama de esquemas o sujeito tiver desenvolvido mais fácil será encontrar aquele que melhor irá atender às necessidades daquela situação.

2. A ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória se ocupa, como nos tempos de sua origem, com a resolução de problemas vinculados a jogos de azar, mas isso deixou de ser sua ocupação exclusiva. Hoje em dia, atua em diversos outros domínios e fornece fundamentação para a contagem de possibilidades de eventos do cotidiano.

Assim a partir da necessidade que os homens tiveram em calcular maneiras seguras de ganhar certos jogos de azar, surgiu a análise combinatória. É interessante que os professores tragam para o âmbito escolar um contexto histórico, pois de acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008), temos que a utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos.

A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático.



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

Os problemas de Análise Combinatória apresentam grande dificuldade em relação à formulação e interpretação dos seus enunciados. E muitos professores acabam ministrando esse conteúdo, com mera exposição de fórmulas.

De acordo com Valquez, Höpner (2004, p. 6):

Esse tema parece não ser bem visto tanto por docentes como discentes de um modo geral, parece sim, uma quantidade enorme de fórmulas com muitas definições que os alunos utilizam mecanicamente, muitas vezes até, não resolvendo simples problemas de contagem. Faltam exemplos concretos, conhecimento e aplicações em sala de aula. A introdução destes conceitos, mesmo que de forma básica, utilizando o princípio fundamental da contagem pode ser o início da desmistificação de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a se explorar problemas mais complexos.

Alguns autores propõe em uma abordagem alternativa, em que as formulas apresentam-se em decorrência da experiência dos alunos, inseridas em um processo de resolução de problemas de contagem. Assim como afirma Sturm (1999, p. 3):

[...] o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problema. As formulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução dos problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008), o estudo da combinatória e da probabilidade é essencial, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias.

Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades, esse experimento aleatório tem três fases, que podem ser interpretadas significativamente no espaço amostral das variações. A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.

3. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GÉRARD VERGNAUD

A preocupação dos que questionam sobre o processo ensino-aprendizagem é a de encontrar meios mais eficazes que possam assegurar a todos os alunos condições para o bom desempenho escolar. O que nos leva a buscar na Psicologia argumentos que possam direcionar uma metodologia, que facilite a aprendizagem. Já que a Psicologia Cognitiva está centrada nos estudos dos processos cognitivos básicos.

Inicialmente, abordaremos a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud, que é uma teoria cognitivista que busca verificar a relação entre o desenvolvimento cognitivo de uma maneira geral e os processos de aprendizagem de conceitos e conteúdos específicos, mediante a presença de um tripé que dá sustentação a esse processo: a situação, a representação e os invariantes.

Segundo Cemin (2008), uma das ideias da teoria de Vergnaud diz que temos um aglomerado de saberes, uma espécie de rede que se reestrutura cada vez que aprendemos um novo conceito ou adquirimos novos conhecimentos. Nesse sentido, as relações entre as operações devem ser aproveitadas para que sejam trabalhadas paralelamente. Saber realizar contas sem entendê-las não traz muitos benefícios. Isso nos remete à questão de aprender Combinatória com base no Princípio Multiplicativo e não em simples aplicação de fórmulas. Nem sempre sabemos que fórmula deve ser usada, o que é análogo a não saber que conta realizar, em séries mais iniciais.

Campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. O domínio de um campo conceitual não ocorre em alguns meses, nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades devem ser estudados ao longo de vários anos se quisermos que os alunos progressivamente os dominem. De nada serve tentar contornar as dificuldades conceituais; elas são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas, mas isso não ocorre de um só golpe (VERGNAUD, 1983 apud MOREIRA 2002. p. 8)

Para Vergnaud conceitualização é o cerne do desenvolvimento cognitivo, devemos, pois, compreender o que se entende por conceito na



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

Teoria dos Campos Conceituais. Para o autor, o conceito é tido como formado por três conjuntos: 1) O conjunto das situações (S) que dão sentido ao conceito. A entrada em um campo conceitual se dá pelas situações responsáveis pelo sentido que é atribuído ao conceito, ou seja, um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações. Essa postulação de Vergnaud se inscreve no âmago de sua teoria, uma vez que o foco de análise é o sujeito-em-ação. O conjunto das situações é reconhecido como o referente do conceito. 2) Os invariantes (I) sobre os quais repousa a operacionalidade dos conceitos. Esses invariantes representam aquilo que se preserva nos conceitos e que permite que sejam reconhecidos como tais nas situações. Os invariantes representam o significado do conceito. 3) As representações simbólicas (R) que podem ser utilizadas para indicar e representar os invariantes e, portanto, representar as situações e procedimentos para lidar com elas. São identificados como o significante do conceito (CARVALHO JR e AGUIAR JR, 2010, p. 4-5).

Trazendo este conceito para a Combinatória, podemos pensar no conceito como sendo a contagem. O conjunto de situações que dá sentido a ele (S) seriam os problemas de contagem. O conjunto de invariantes operatórios (I) seriam os processos de multiplicação e divisão envolvidos na resolução dos problemas. As representações simbólicas (R) seriam todos os tipos de linguagens utilizadas para explicar o processo pelo qual é resolvido um problema, como, por exemplo, o uso de diagramas de árvores, de sentenças formais do tipo “a ordem não importa”, criação de um esquema com tracinhos, indicando as vagas disponíveis para agrupar elementos ou ainda a separação dos objetos a serem contados em classes mostradas com diagramas (CEMIN, 2008, p.65)

Existem alguns nomes que classificam certos tipos de esquemas. Quando em Combinatória, ou em outro conteúdo qualquer do campo multiplicativo, por exemplo, fazemos diagramas ou gráficos, estamos usando um esquema perceptivo-gestual. Nesta mesma denominação enquadra-se o esquema de contar objetos (contagem). Outro tipo de esquema, o esquema verbal, está relacionado a fazer um discurso, por exemplo. Além da fala e dos gráficos e diagramas, os esquemas podem, ainda, ser representados pela escrita ou por fórmulas.

Na Combinatória, o discente, ao se deparar com um problema, precisará buscar ferramentas, ou seja, um esquema que o resolva. Dessa maneira, é possível notar a educação como fonte que dar subsidio ao desenvolvimento de esquemas, que auxiliará os alunos ao logo da vida escolar, e o papel do professor é promover situações geradoras e significativas para o aluno. Daí também a importância de se trabalhar análise combinatória desde as series



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

iniciais, já que Vergnaud, afirma que esse desenvolvimento é lento.

4. METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada no segundo semestre de 2014, junto a uma escola pública de ensino regular, do sertão da Paraíba. O estudo ocorreu em contexto natural de sala de aula, com pretensão de conhecer a realidade escolar tal como ela é vista pelos atores que nela intervêm diretamente. O instrumento de pesquisa aplicado se deu em forma de dois questionários, um pré-teste, ambos destinados aos alunos da 3ª série do Ensino Médio e uma entrevista destinada a dois professores da mesma escola, sendo que um deles era o professor dos discentes analisados.

A turma, composta de vinte alunos, era heterogênea quanto aos níveis de aprendizagem e homogênea quanto à faixa etária. Um dos objetivos desse trabalho é identificar e verificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, bem como compreender os esquemas mentais e a conceitualização defendida por Vergnaud envolvendo o assunto de análise combinatória.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

No primeiro questionário, buscou-se apenas analisar os dados sócio-culturais dos discentes. No segundo questionário, buscou-se identificar a apropriação dos alunos quanto aos conceitos, termos e estratégias que envolvem o estudo da análise combinatória. Por último tivemos o pré-teste, nele buscou-se avaliar as habilidades dos alunos em resolver problemas simples, relacionados ao pensamento combinatório.

O segundo questionário aplicado foi o composto das seguintes questões:

- 1) Você já estudou o conteúdo Análise combinatória em alguma série anterior? Qual?
- 2) Esse assunto trabalha que tipo de questão dê um exemplo.
- 3) Você já ouviu a palavra fatorial? Tente defini-la e dê um exemplo.
- 4) Qual desses termos você conhece? Comente cada um.
 arranjo
 permutação
 combinação
- 5) Você sabe o que é anagramas?
- 6) Você sabe o que é diagrama de árvores?

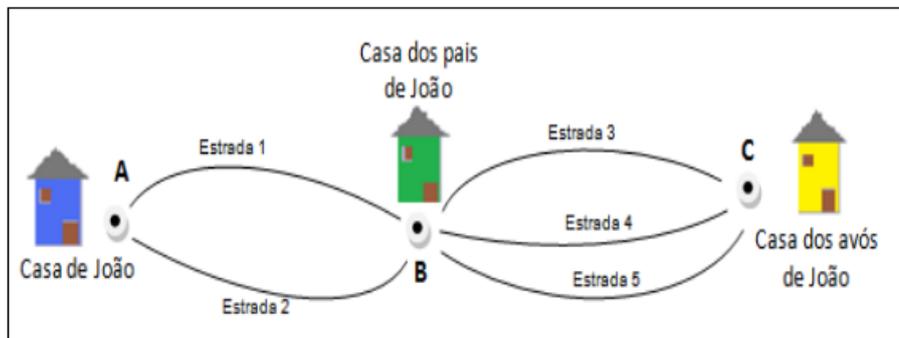


Dos resultados obtidos a cerca do questionário acima, temos que, para a pergunta 1 cerca de 90% dos alunos responderam não ter estudado esse assunto nas series anteriores, 5% dos alunos disseram não lembrar se tinham estudado esse conteúdo e 5% disseram que acham que já estudou esse assunto, mas não lembrava em qual serie. A pergunta 2, 100% dos alunos não souberam responder.

A pergunta 3, 90% disseram nunca terem ouvido falar na palavra fatorial e apenas 10%, já tinham ouvido falar, mas não conseguiram definir. Quanto à pergunta 4, 100% dos alunos não tiveram conhecimentos das palavras, arranjo e permutação, e 25%, dos alunos afirmam conhecer o termo combinação, mas apenas 5%, comentaram sobre o significado do termo. A respeito da pergunta 5 e 6, dos alunos pesquisados somente 5% afirmaram saber o que seria um anagrama e um diagrama de árvore.

As questões do pré-teste, foram as seguintes:

- 1) João vai visitar seus avós, mas antes deve passar pela casa de seus pais. De sua residência a casa de seus pais, há duas estradas e da casa de seus pais para a casa de seus avós há três estradas. De quantas maneiras diferentes João pode ir de sua casa até a casa de seus avós.



O desenho lhe ajudou a responder a questão?

- 2) Da cidade A ate a cidade B pode-se fazer a viagem de trem ou de navio. Existem duas companhias ferroviárias e duas de navegação á disposição e em todas há 3 tipos de passagem: 1ª classe, 2ª classe e econômica. De quantas modos uma pessoa pode fazer sua viagem de A ate B.
- 3) De quantas maneiras diferentes Bia poderá se vestir se ela possui quatro blusas(A, B, C, D) e três saias(1, 2, 3)? (Enumere todas as possibilidades que ela tem de se vestir)

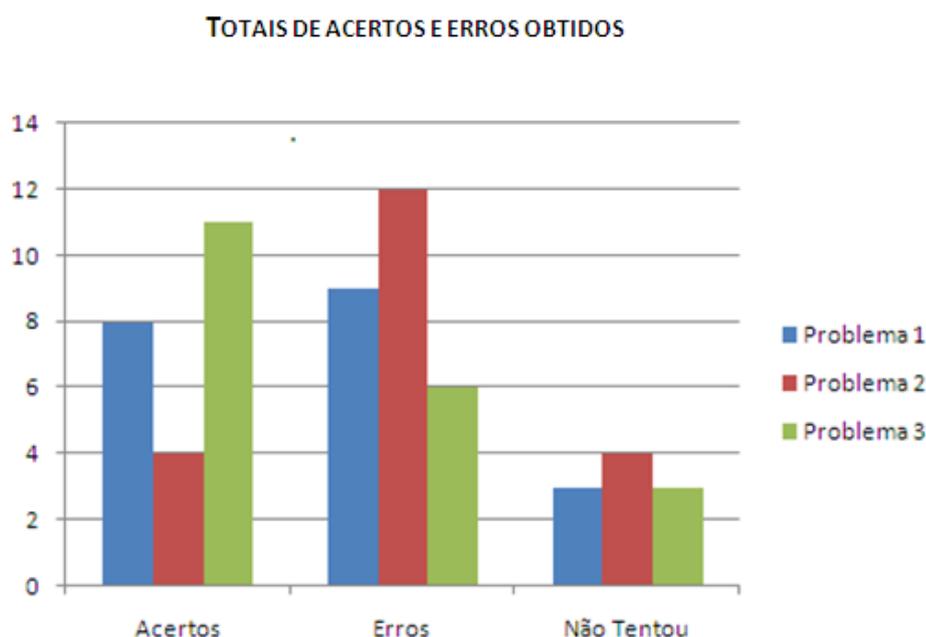


III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

No pré-teste acima foram apresentados três problemas de análise combinatória para os alunos resolverem. E foram identificados os tipos de estratégias utilizadas pelos alunos, de forma isolada ou concomitantemente, para resolver os problemas de combinatória, vejamos o Gráfico 1 com os resultados obtidos, quanto ao número de erros e acertos.

Gráfico 1 - Mostra a análise quantitativa de acertos e erros relativa à problemática análise combinatória.



O gráfico 1 mostra que em relação ao primeiro problema, cerca de 40 % dos discentes acertaram a resposta do problema, outros 45 % erraram e 15% nem tentaram. Esperava-se que uma porcentagem maior de alunos acertasse esse problema já que o mesmo trazia um desenho da árvore de possibilidades, bastando que o aluno interpretasse o desenho. Dos alunos que acertaram observou-se que apenas o aluno um usou o princípio fundamental da contagem, os demais acertaram pela compreensão do desenho.

Com relação ao segundo problema, apenas 20 % acertaram, 60% erraram e 20 % nem tentaram. Dos que acertaram vamos analisar o aluno A e o aluno B, de acordo com a estratégia de resolução utilizada. Na figura 1, temos o uso do princípio fundamental da contagem, acompanhado de um desenho, que em nada nos ajuda a resolver o problema.



III CONEDU

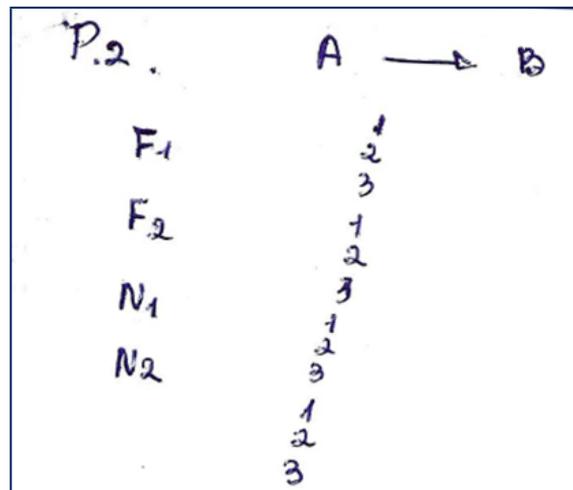
CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

Figura 1 - Solução de um aluno do 3º ano, para um problema de raciocínio combinatório.



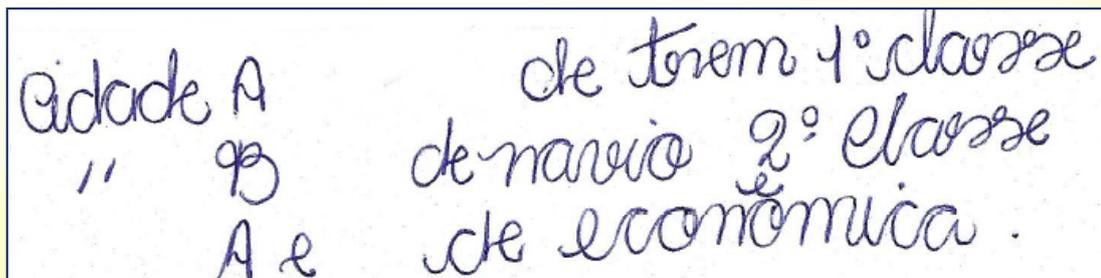
Na figura 2, podemos observar que o aluno buscou a resolução por meio do diagrama de árvores enumerar as possibilidades, obtendo êxito mesmo sem completar o diagrama.

Figura 2 - Solução de um aluno de 3º ano, para um problema de raciocínio combinatório.



Ainda analisando o problema 2, temos a figura 3, em que o aluno C, tenta enumerar as possibilidades de ir da cidade A pra cidade, mas o aluno equivocou-se, não enumerando todas as possibilidades.

Figura 3 - Solução de um aluno de 3º ano, para um problema de raciocínio combinatório.



Ainda analisando o Gráfico 1, temos o problema 3 que apresenta um nível muito fácil, questões desse nível, são trabalhadas já nas series iniciais, quando o estudante, aprende a



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

multiplicar. E 55% acertaram, 30% erraram e 15% não tentaram. Dos que acertaram 5% utilizaram agrupamentos em tabela que permite uma visualização clara dos resultados obtidos, como podemos ver na figura 4. Os outros 50 % utilizarão a enumeração de cada possibilidade.

Figura 4 - Solução de um aluno de 3º ano para um problema de raciocínio combinatório.

$4 \times 3 = 12$

A	B	C	D
1	2	3	1
3	1	2	2
2	3	1	3

De acordo com análise dos registros, podemos perceber que em nenhuma resolução foi utilizadas o uso de formulas, tendo uso do Princípio Fundamental da Contagem, de tabelas, da árvore de possibilidade, e da enumeração direta das possibilidades, sendo que o uso dos mesmos nos leva a concluir, que o assunto análise combinatória, não foi visto por cerca de 95% dos alunos pesquisados.

Quanto aos professores, foram entrevistados dois professores de matemática, sendo que um deles era professor da turma investigada. Quando perguntados, se tinham alguma dificuldade no assunto de análise combinatória. Obtivemos as seguintes respostas:

Professor 1: Um pouco, pois na minha formação os problemas eram muito complexos e de difícil entendimento.

Professor 2: Sim, no ensino médio e na graduação o assunto foi visto de forma rápida e sem muita explicação.

E quando perguntados quais técnicas eles mais utilizavam para resolver os problemas de contagem, o professor 1, não soube responder e o professor 2, afirmou que usava o princípio fundamental da contagem e a lógica, já que tinha dificuldade em desenvolver arranjo e permutação.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

Um dos objetivos do trabalho era constatar o conhecimento que os alunos possuem sobre análise combinatória, e de acordo com os resultados obtidos, foi notório que a maioria dos alunos não tiveram contato com o assunto análise combinatório em nenhum outro momento, e que os problemas que eles conseguiram acertar, foi usando basicamente o raciocínio lógico. Isso pode ser gerado por uma deficiência que parte dos professores já que afirmam ter dificuldade nesse assunto, o que levar a acreditar que o assunto muitas vezes não é trabalhado em nenhuma série, e quando trabalhado, não é abordado de maneira satisfatória afim de que se alcance uma aprendizagem significativa.

No que se refere à Teoria de Campo Conceitual de Vergnaud, podemos destacar da observação e análise das atitudes dos alunos nas resoluções dos problemas propostos, que o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório não são simples, mesmo para alunos na fase de conclusão do Ensino Médio. Por isso os professores devem propor aos discentes uma variedade de problemas que envolvam pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório, desde as series iniciais para que se tenham um desenvolvimento gradativo dos esquemas relacionados às estruturas multiplicativas.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. **Orientações curriculares do ensino médio.** Ministério da Educação Brasília, DF, 2004.

CARVALHO, Jr. AGUIAR, Jr. **Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático.** Disponível em: <www.nutes.ufrj.br/abrapec/venpec/conteudo/artigos/3/doc/p665.doc>. Acesso em: 12 de agosto de 2015.

CEMIM, K.L **Ensino de Combinatória: Problemas de divisão, teoria de Vergnaud e metodologia da engenharia didática.** 2008. 91p. Trabalho de conclusão de Curso- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

MOREIRA, M.A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Investigações em Ensino de Ciências, v.7, n.1, 2002.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa.,** 1999. 94p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas. Campinas, 1999.



III CONEDU

CONGRESSO NACIONAL DE
E D U C A Ç Ã O

VALQUEZ, C. HÖPNER, F. **Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica.** Anais do VIII ENEM -História da Matemática e Cultura. Pernambuco, 2004.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais.** In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26, 1993.