NÚMERO DE OURO: UMA INTERESSANTE APLICAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA À ANÁLISE MATEMÁTICA

Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes[1]; Jaques Silveira Lopes[2]

[1]*Universidade Federal do Rio Grande do Norte; gabriela@ccet.ufrn.br*
[2]*Universidade Federal do Rio Grande do Norte; jaques@ccet.ufrn.br*

Resumo: Neste trabalho, sinalizamos para uma melhor compreensão do Conjunto dos Números Reais, como norteadora dos nossos objetivos, pois se trata do alicerce da Análise Matemática, além de apresentar clara conexão com os conteúdos da matemática básica. Vemos como desafiadora e motivadora a tarefa de tornar mais acessível, através de ações adequadas, a compreensão de um conceito que ganhou, a partir do século XIX, uma sistematização extremamente rigorosa e formal, graças às contribuições de grandes matemáticos, como Dedekind e Cantor. O estudo de sequências e séries de números reais é um ponto de partida para se provar que todo número real, racional ou irracional, admite uma representação decimal infinita. Central ao estudo de sequências e séries está a ideia de processos infinitos, como, por exemplo, somas de infinitas parcelas de uma série. Nesse sentido, é importante que o aluno de graduação alcance uma boa compreensão desses processos infinitos e, para isso, é indispensável um entendimento significativo sobre limites. Fundamentamos nossas ações em uma reflexão baseada na Educação Matemática, na História da Matemática e nos conteúdos da componente curricular de Análise Matemática. Por considerarmos fundamental o pensamento matemático referente à invenção matemática, associamos a essa fundamentação os processos do Pensamento Matemático Avançado, proposto por Tommy Dreyfus. O produto central da nossa pesquisa é o de elaboração de instrumentos pedagógicos que apontam para o ensino de conteúdos que permeiam essa componente curricular. Mostramos como exemplo de nossos esforços um tema extremamente fascinante: a Seção Áurea, que está, direta ou indiretamente, relacionada às dimensões de alguns objetos de nosso convívio no dia-a-dia, como nos cartões de crédito e nas cédulas. Podemos ainda encontrar a seção áurea na natureza, desde as disposições dos ramos das árvores ao corpo humano; na arquitetura, com as construções das pirâmides até as projeções de templos egípcios; nas artes, com a pintura da Mona Lisa de Leonardo da Vinci e assim sucessivamente em muitas outras situações. Uma importante implicação da seção áurea é o surgimento do número de ouro que é um número irracional. A partir deste ponto, as relações que existem entre as sequências de Fibonacci e a razão áurea fornecem subsídios para a discussão de um processo infinito que é o limite de uma sequência.
Palavras-chave: Análise Matemática, Número de Ouro, História da Matemática.

Introdução

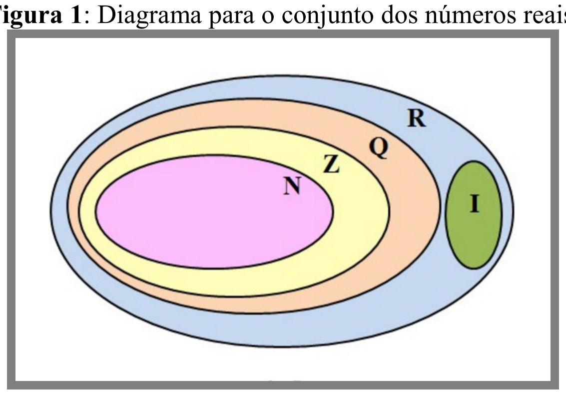
Os números reais estão na prática Matemática dos alunos da Educação Básica e da Educação Superior. Nos cursos de graduação em Matemática no Brasil é comum em uma componente curricular de Análise, um número real ser apresentado como um corte de Dedekind nos racionais, isto é, um par (A, B) de subconjuntos não vazios e complementares dos racionais, tais que A não possui um elemento máximo, todo elemento de A é cota inferior para B, e todo elemento de B é cota superior para A. Ou ainda, um número real é uma classe de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais, segundo a seguinte relação: duas sequências são equivalentes se, e somente se, a diferença entre elas converge para zero.

Ou ainda, um número real é uma classe de equivalência de intervalos encaixantes, segundo a seguinte relação de equivalência: $[a_n, b_n] \sim [c_n, d_n]$se, e somente se, as sequências de números racionais $(a_n - c_n)$ e $(b_n - d_n)$ convergem, ambas, para zero. Mas, antes de um curso de Análise na graduação, um número real era apenas um número e, depois, o número pode ser cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de Cauchy ou classes de equivalência de intervalos encaixantes. O mesmo objeto, número real, pode ser definido de três formas diferentes baseando-se em objetos de naturezas distintas.

Na Educação Básica a noção do que vem a ser um número real passa por elaboração e reelaboração a partir da ideia básica de número natural. A construção dos inteiros e racionais vem de uma busca em tentar superar limitações particulares da noção precedente de número. Suas construções são frutos de uma ampliação do conjunto anterior seguindo a rota naturais → inteiros → racionais. Vamos deixar aqui uma pergunta: e os irracionais? As três formas de definir números reais, como exposta anteriormente, "configura uma inversão de rota que entra em conflito com o processo que se desenvolve na escola" de acordo com Moreira e David (2010), já que os reais são "criados" sem uma necessidade explicita e tem fundamentos em objetos de natureza distinta da noção anterior de número real.

Quanto aos números irracionais, as definições, a partir dos cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de Cauchy ou classes de equivalência de intervalos encaixantes, não representam uma dificuldade de inclusão natural no conjunto dos reais, visto que os irracionais já são contemplados nessas definições. Já no contexto da Educação Básica, os números irracionais são artificialmente agrupados aos números racionais para que juntos constituam o conjunto dos números reais. Muitas vezes nós, alunos e professores, nos deparamos com diagramas como o mencionado na figura 1, a seguir, que não contribui para um entendimento acerca do conjunto dos reais.

Figura 1: Diagrama para o conjunto dos números reais.



Fonte: <http://www.infoescola.com/matematica/numeros-reais/>. Acesso: 10 dez. 2016

Ao observar o diagrama da figura 1, temos a ideia que os números irracionais não se *misturam* com os racionais, ideia diferente da que é apresentada pela representação dos reais na reta. Além disso, o espaço da cor azul não é constituído por racionais e nem irracionais, e o aluno pode se perguntar, quais números estão lá?

Os números irracionais representam um tema que deve ser estudado com detalhes nos cursos de Licenciatura em Matemática, já que estes se revelam uma dificuldade de natureza cognitiva e pedagógica na ação do professor em sala de aula na Educação Básica.

> A apresentação usual dos reais nesses cursos [Licenciatura em Matemática], em que se valoriza enfaticamente a ideia de estrutura abstrata, em que os números e as operações têm seus significados dados pela estrutura e esta, por sua vez, é constituída através de axiomas, configura, a nosso ver, uma forma de conhecer os reais que se desconecta das questões escolares referentes ao trabalho com esse conjunto numérico. (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 81)

Um número irracional, geralmente, é apresentado aos alunos da Educação Básica como um número que não pode se escrever como razão de inteiros ou como uma representação decimal infinita periódica. Mas nenhuma dessas duas apresentações é possível de ser sustentada com base na noção de número atribuída anteriormente e cujo universo numérico se limita aos racionais. E se o aluno não compreende conceitualmente o que significa uma representação decimal finita, ele também não compreenderá o que é um número irracional. E é com essas limitações que o estudante do Ensino Médio chega à Universidade, para o curso de graduação em Matemática, munido apenas de alguns exemplos de números irracionais e sem uma consciência significativa sobre o conjunto dos números reais.

O estudo de sequências e séries de números reais é um ponto de partida para se provar que todo número real, racional ou irracional, admite uma representação decimal infinita. Central ao estudo de sequências e séries está a ideia de processos infinitos, como, por exemplo, somas de infinitas parcelas de uma série. Nesse sentido, é importante que o aluno de graduação alcance uma boa compreensão desses processos infinitos e, para isso, é indispensável um entendimento significativo sobre limites, incluindo aí os no infinito. É importante ressaltar nesse momento, que a construção dos inteiros, por ampliação dos naturais, e dos racionais, por ampliação dos inteiros, não tem que, necessariamente, recorrer a processos infinitos.

No curso de Licenciatura em Matemática o conteúdo de Cálculo é apresentado aos alunos nos primeiros semestres do curso, com uma abordagem clássica e universal, voltado para a parte algorítmica e com o objetivo de ensinar derivadas e integrais, visando simplesmente às aplicações. Notamos que, tradicionalmente, um curso de Cálculo está fragmentado em três partes: limites, derivadas e integrais; no entanto, o conceito de limite está presente nas definições formais de derivadas e integrais. É, também, perceptível que o desenvolvimento desses tópicos nos livros didáticos, comumente indicados como referências bibliografias destas componentes curriculares, tem abordagem predominantemente formal. Isso foi constatado nos Projetos Pedagógicos vigentes dos cursos presenciais de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), da Universidade Federal de Viçosa (UFV) e da Universidade Federal do Tocantins (UFT). Isso também é notado nas ementas oferecidas por outras universidades brasileiras (AMORIM, 2011, p. 60).

Ao abordar o conteúdo de limites, o que prevalece são técnicas de Cálculo de limites carregadas de manipulação de símbolos, que não despertam no aluno um real pensamento matemático. No desenvolvimento do conteúdo de derivadas, o limite da razão incremental toma um papel de significativa importância na introdução do conceito de derivada. Por outro lado, o limite é pouco explorado no que diz respeito a um processo desencadeador dessas definições. Rapidamente a manipulação de símbolos é exigida nos cálculos de derivadas e se sobrepõe a qualquer alternativa de ensino-aprendizagem que leve em consideração o desenvolvimento de processos de pensamento matemático. A esse respeito, Tall (1991) sugere que a apresentação lógica pode não ser apropriada para o desenvolvimento cognitivo do estudante.

Metodologia

A primeira fase dessa pesquisa buscou em algumas referências bibliográficas fomentar nossa reflexão sobre a componente curricular de Análise Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática buscando compreender os entrelaces dessa componente curricular, de conteúdo reconhecidamente sofisticado, e a atuação do Professor de Matemática da escola básica. Nossas reflexões nos revelaram a necessidade de indicar alguns objetivos para o avanço dessa pesquisa: Elaboração de atividades matemáticas, aderentes à disciplina de Análise, que fogem de uma abordagem lógico-formal-dedutiva e levem em consideração os aspectos históricos do conteúdo; Dar subsídios para que o formador do professor de Matemática da Educação Básica possa utilizar em seu trabalho na Licenciatura.

Na direção de alcançar os objetivos propostos, investigamos uma proposta de abordagem preparatória dos conteúdos que permeiam os fundamentos da Análise, baseando-se em fatores histórico-educacionais acerca do tema. E, como dito anteriormente, com isso pretendemos fornecer ao Licenciando de Matemática uma melhor inserção aos conteúdos de Análise; além de pesquisar possíveis formas de articulação entre os saberes adquiridos na Análise e a atuação profissional do Professor de Matemática.

Uma das dificuldades dos estudantes na compreensão dos conteúdos de Análise está ancorada na ideia de processos infinitos. É desejável para o sucesso do aluno, com relação ao aprendizado de um conteúdo matemático em uma determinada componente curricular, que ocorra a substituição da atividade do estudante meramente ligada à execução de procedimentos padronizados baseados na repetição, por aquela ligada à abstração, à representação e à análise do conteúdo. Para Dreyfus (1991) uma longa sequência de atividades de aprendizagem é a base para a compreensão dos conceitos matemáticos. A realização dessas atividades implica a execução de uma variedade de processos que se interagem.

Dreyfus (1991) defende que são dois os processos de pensamentos matemáticos mais evidenciados: a Representação e a Abstração. Estes estão associados tanto ao pensamento matemático dos anos iniciais de ensino quanto ao pensamento matemático avançado, sendo que a principal distinção está relacionada à complexidade dos processos em cada tipo de pensamento, que geralmente é gerenciada pelo professor. O processo de Representação, que pode ser mental ou simbólico, está relacionado com as ações de encontrar uma representação, de visualizar ou mudar representações, transladar e modelar. Ao passo que o processo de Abstração está intimamente ligado às ações de generalizar, sintetizar e abstrair.

As atividades matemáticas que propomos para alcançar os conteúdos de Análise buscam desenvolver esses dois processos, representação e abstração. Com isso, há um desenvolvimento da cognição do indivíduo que segue na direção de suprimir as novas demandas geradas pela inclusão desses conteúdos mais avançados em seu repertório de estudo. Esta perspectiva que incorporamos na nossa pesquisa pode ser claramente ilustrada pelo intercepto de três componentes que estão inseridas no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Análise nos cursos de Licenciatura em Matemática discutida em Lopes e Lopes (2016): Educação Matemática, História da Matemática e conteúdos de Análise.

A partir daí, para alcançarmos os objetivos, a metodologia inicialmente utilizada foi baseada em uma pesquisa bibliográfica com a intenção de correlacionar fatos históricos com as dificuldades já constatadas em pesquisas de Educação Matemática por nós Lopes e Lopes (2016). Com isso, foi possível contato com um maior leque de descrições destas dificuldades encontradas ao longo do tempo sobre o ensino e aprendizagem de Análise Matemática e permitiu nosso trabalho no entrelaçando os conteúdos de Análise à história da Matemática sustentada por nossas reflexões acerca da Educação Matemática. Nas atividades elaboradas por nós procuramos, sempre que possível, destacar conteúdos de outras componentes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática ilustrando, assim, as correlações entre as diversas áreas da Matemática.

Discussão e Resultados

Para alcançarmos o objetivo de discutir a ideia de processo infinito, abordaremos alguns personagens da história de Matemática e seus resultados que nos auxiliam a chegar ao tópico principal dessa atividade que é o Número de Ouro e sua relação com o conteúdo de limite. Além disso, esse tipo de tratamento se alinha ao ponto de vista de Valdés (2006), quando assegura que a história deveria ser um potente auxiliar para alcançar o objetivo de demarcar temporalmente e espacialmente as grandes ideias, problemas, junto com a sua motivação, os seus precedentes; além de contribuir para desmistificar a visão individualista dada aos matemáticos que mudaram o domínio da Matemática acrescentando suas ideias criativas, declarados como gênios pela maioria das pessoas, ignorando dessa forma o papel exercido pelo trabalho coletivo de gerações e de grupos de matemáticos.

Relacionamos os tópicos Matemáticos se levam a uma melhor compreensão do Número de Ouro e iniciamos nossa abordagem tratando de temas elementares da Teoria dos Números e Geometria. Além de ressaltar a relação de conceitos teóricos com aplicações práticas que é objeto de considerável interesse no curso de matemática, e em especial nos cursos de Licenciatura. Buscando propiciar ao estudante um melhor entendimento de um dos principais resultados da matemática básica, como por exemplo, o Teorema de Pitágoras e relacionando-o com a surpreendente Proporção Áurea. A respeito desta proporção é abordado o seu aspecto histórico e matemático, além indicar algumas aplicações práticas. Também, a sequência de Fibonacci que tem uma concreta ligação com o Número de Ouro.

Mais de 500 anos antes de Cristo, os gregos (pitagóricos), estudando as relações entre os segmentos de um pentagrama (pentágono regular estrelado), descobriram um número que desempenhou um papel importante na geometria, na estética, nas artes, na arquitetura e na biologia. Este número é chamado de número áureo ou número de ouro. Esse número é considerado o símbolo da harmonia, podendo ser encontrado em várias relações métricas:

- Na natureza: Podemos encontrá-lo na forma de uma espiral, como na concha do nautilo

(Nautilus pompilius);na distribuição de pétalas de diversas flores; na disposição dos ramos de certas árvores.

- Na arquitetura: Temos a construção do Parthenon (templo da deusa de Atena), no qual é notado constantemente a presença da razão áurea na busca de uma harmonia estética; e ainda, o arquiteto Le Corbusier, que usou como base o retângulo áureo para projetar várias residências.

- Nas artes: Temos Leonardo da Vinci, que usou-a para pintar a Mona Lisa, uma de suas mais notáveis obras. Em vários pontos da obra, tais como nas relações entre seu tronco e cabeça, ou entre os elementos do rosto aparece a razão áurea. Além de Da Vinci, vários outros artistas usaram a razão áurea para fazer suas pinturas e esculturas, como, por exemplo, George Seurat no século XIX. Esses artistas descobriram que utilizando a razão $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ poderiam criar um sentido de ordem em seus trabalhos.

- Na matemática: São inúmeras as aplicações desse número. Podemos citar, entre muitos, o pentagrama e o decágono regular; poliedros regulares e o retângulo áureo.

O homem também se apropriou da razão áurea para realizar inúmeras obras e monumentos. Desde as mais remotas épocas até os dias atuais, tem-se construído com a ajuda da razão áurea, por ser ela o número que expressa a mais perfeita relação de harmonia já conseguida pelas mãos humanas. A secção áurea como veio a ser considerada ou também divina proporção, foi estudada pelos gregos antes do tempo de Euclides, mas foi ele quem descreveu a secção áurea como sendo a divisão de um segmento de reta em média e extrema razão.

O número de ouro é o número irracional $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1.618033989$. A designação adaptada para o número de ouro, Φ (Phi maiúsculo), é a inicial do nome de Fídias (em grego Φειδίας), escultor e arquiteto, que usou a proporção de ouro em muitos dos seus trabalhos. Existem várias representações geométricas, para que possamos chegar ao número de ouro. Se desenharmos um retângulo cuja razão entre os comprimentos dos lados maior e menor é igual ao número de ouro, obteremos um retângulo de ouro. O retângulo de ouro é um objeto matemático que marca forte presença no domínio das artes, nomeadamente na arquitetura, na pintura, e até na publicidade. É considerado de todos os retângulos, o mais agradável à vista. Pode-se discutir com os estudantes, a construção geométrica de um retângulo de ouro utilizando régua e compasso.

Pitágoras nasceu em Samos, uma ilha do mar Egeu, próxima à costa da Jônia, vivendo aproximadamente no período entre (585-500 a.C.). Era um profeta e místico, que possivelmente teria sido discípulo de Tales. Viajou para a Babilônia e ao Egito, aprofundando seus conhecimentos em matemática, astronomia e religião. Contando assim com inúmeros seguidores, que levaram suas crenças filosóficas, religiosas, políticas e cientificas a várias regiões da Antiguidade Clássica. Os pitagóricos levaram a extremos sua adoração pelos números, baseando neles sua filosofia e seu modo de ver o mundo. Foram eles que descobriram que, em todo e qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, conhecido como Teorema de Pitágoras (EVES, 2004).

Um conceito importante é o de terno pitagórico, que diz que um terno de números inteiros positivos (a, b, c) tais que: $a^2 + b^2 = c^2$ é um terno pitagórico. Assim, por exemplo, são ternos pitagóricos:

$$(3,4,5);\quad (6,8,10);\quad (5,12,13),\ \text{pois}\ 3^2+4^2=5^2;\quad 6^2+8^2=10^2;\quad 5^2+12^2=13^2.$$

A existência de uma infinidade de ternos pitagóricos e uma forma de obtê-los pode ser discutida com estudantes, esse momento fornece a oportunidade de conjecturas, testes e uma situação dialógica que podem levar a uma representação mental adequada. Após essa discussão, a representação simbólica a seguir, encontrada em Filho (1988) pode ser apresentada e discutida:

- $a = 2k$; $b = k^2 - 1$; $c = k^2 + 1$, fazendo $k = 2,3,4...$ dão uma infinidade de ternos pitagóricos.
- $a = 2k + 1$; $b = 2k^2 + 2k$; $c = 2k^2 + 2k + 1$, fazendo $k = 1,2,3,...$ dão uma infinidade de ternos pitagóricos.

Temos a oportunidade de evidenciar os dois tipos de representação, mental e simbólico, que estão ligados ao processo de pensamento matemático (Dreyfus, 1991).

Para desenvolver o processo de Abstração, que está intimamente ligado às ações de generalizar, sintetizar e abstrair, propomos o estudo de Condições Necessárias e Suficientes para que (a, b, c) seja um Terno Pitagórico. Que é o seguinte: um terno (a, b, c) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros x e y que verificam as quatro seguintes condições: 1) $x > y > 0$, 2) $x \equiv y \pmod 2$, 3) xy é um quadrado perfeito, 4) $a = \sqrt{xy}$; $b = \left(\dfrac{x-y}{2}\right)$; $c = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Leonardo de Pisa (1180-1250), conhecido também como Fibonacci ou filho de Bonaccio, nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Boa parte da sua educação se deu no norte da África, onde seu pai trabalhava como oficial italiano. Viajou amplamente por toda a costa do Mediterrâneo, visitando o Egito, a Síria, a Sicília, à Grécia, onde pode entrar em contato com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Em 1202, após retornar a sua terra natal, publicou sua obra, o Líber abaci (livro do ábaco), que tem como uma das preocupações centrais, introduzir o sistema decimal hindo-arábico e o uso de numeração árabe na Europa. O livro se inicia com uma idéia que parece quase moderna, mas que era característica da forma de pensar medieval tanto islâmica quanto cristã - que a aritmética e a geometria são interligadas e se auxiliam mutuamente. O livro contém ainda uma farta coleção de problemas que, durante séculos, serviu de fonte a autores de textos (EVES, 2004).

Para tornar a leitura da obra Líber abaci mais interessante, Fibonacci incluiu no livro alguns problemas curiosos e estimulantes, dentre os quais, um veio a se destacar e está correlacionado ao Número de Ouro. Vejamos o problema:

"Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que o cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?".

Fibonacci prosseguiu para os cálculos: no primeiro mês, teremos um par de coelhos que se manterá no segundo mês; no terceiro mês de vida darão origem a um novo par, e assim teremos dois pares de coelhos; para o quarto mês só teremos um par a reproduzir, o que fará com que obtenhamos no final deste mês, três pares. Em relação ao quinto mês serão dois os pares de coelhos a reproduzir, o que permitirá obter cinco pares destes animais no final deste mês. Continuando desta forma, ele mostra que teremos 233 pares de coelhos ao fim de um ano de vida do par de coelhos com que partimos. Listando a sucessão 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...,233 na margem dos seus apontamentos, ele observou que cada um dos números a partir do terceiro é obtido pela adição dos dois números antecessores, e assim poderemos fazê-lo em ordem a uma infinidade de números de meses (EVES, 2004, p. 315).

Portanto este problema dá origem a uma sequência infinita de números inteiros positivos:

$$(f_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

Uma representação simbólica para essa sequencia é $f_1 = f_2 = 1 \quad e \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n > 2$ e ela é conhecida como sequência de Fibonacci. Essa sequência é dotada de propriedades importantes e ricas em aplicações.

A relação da Sequência de Fibonacci com o Número de Ouro se mostra ao efetuarmos a divisão da cada número de Fibonacci pelo posterior, que pode ser observado na figura 2. O processo infinito que se destaca aqui é que o resultado deste quociente tende para $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, o Número de Ouro, isto é, $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n-1}}{f_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Nossa intenção é mostrar essa convergência aos estudantes, explorando aspectos que levam a uma melhor compreensão do processo e não do resultado. Nesse momento, vislumbramos a oportunidade de examinar a representação decimal infinita para números reais.

Figura 2: Quociente entre números de Fibonacci

f_{n-1}	f_n	$\frac{f_{n-1}}{f_n}$
1		
1	1	1
1	2	0,5
2	3	0,666...
3	5	0,6
5	8	0,625
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
144	233	0,6180257511
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Conclusão

Ao iniciarmos esta pesquisa nos propusemos a buscar respostas a questionamentos que surgiram no percorrer da nossa atividade como professores de Matemática de Cursos de Licenciatura, mais especificamente no que se refere ao ensino e aprendizagem de Cálculo e Análise. Enquanto lidamos em sala de aula com os conteúdos desta componente curricular, percebemos que os alunos têm pouco conhecimento sobre os números reais. Esse quadro é, em parte, fruto de que na Educação Básica é dado um tratamento com enfoque principal voltado para as operações: os números reais são objetos que podem ser somados e multiplicados, segundo regras pré-estabelecidas. Já no Ensino Superior o que é mais valorizado é a estrutura algébrica que caracteriza os conjuntos, entendemos que apenas essa abordagem não é suficiente para que o licenciando compreenda os números reais. Confiamos que trabalhando a sedimentação do conceito fundamental de números reais os estudantes podem ter mais êxito em componentes curriculares como Cálculo e Análise.

Na tentativa de minimizar as repercussões negativas desse quadro supomos que o desenvolvimento do pensamento matemático pode não ser alcançado se utilizarmos apenas uma metodologia de ensino baseada na apresentação de resultados clássicos da Matemática sem que o aluno conheça um pouco das ideias que desencadearam esses conceitos. No aspecto do ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos no curso de Licenciatura em Matemática, destacamos os processos centrais do Pensamento Matemático Avançado propostos por Dreyfus (1991), como Representação e Abstração. Fundamentamos a elaboração de nossas atividades destacando esses processos.

E nos fundamentamos nas ideias de Mendes (2015) que indica o uso da história da Matemática na construção de situações que oportunize o estudante a se desafiarem e a tomarem parte em um processo de criatividade Matemática como parte de sua aprendizagem. Indicamos na que os estudantes devem ter conhecimento dessas ideias através de adaptações de textos históricos elaboradas pelo professor, além disso, textos atuais devem compor esse conjunto de materiais levados ao estudante pelo professor, para que seja percebido um panorama caracterizado pela evolução de conceitos anteriores para uma apresentação mais contextualizada de um conceito atual, como, por exemplo, de integral.

Mostramos que o Número de Ouro é uma fonte de atividades que contemplam os processos do pensamento matemático avançado proposto por Dreyfus (1991): atividades de exploração, especulação ou investigação, atividades generalizantes, atividades sintéticas com a apresentação de fórmulas, atividades representacionais como as tabelas. Ao discutir os potencias pedagógicos do tema para o ensino de conteúdos que permeiam a componente curricular de Análise do curso inicial de formação de professores apontamos caminhos para o melhoramento do entendimento dos estudantes acerca dessas ideias matemáticas.

Na nossa pesquisa, percebemos que algumas propriedades estéticas e artísticas da razão áurea no retângulo áureo, as relações em um pentagrama e o estudo da equação algébrica $x^2 - x - 1 = 0$, cuja uma das raízes é o número de ouro, podem ser fonte de investigação para os estudantes. Portanto, o nosso propósito foi apresentar o número de ouro, como um tema desencadeador do conceito de limite que envolve processos infinitos

Nossa pesquisa subsidiou a elaboração de instrumentos, aderentes à disciplina de Análise, com uma abordagem alternativa, que fuja daquela usual lógico-formal-dedutiva.

Indicando para a aplicação destas atividades, possivelmente em cursos de extensão e/ou disciplina e coleta e análise destas experiências didáticas, com essa temática, cujo público alvo seja formado por professores da Educação Básica e licenciandos em Matemática.

Referências

DREYFUS, T. *Advanced Mathematical Thinking Process*. In: TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Edited by David Tall. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

EVES, H. Tradução: DOMINGUES, Higino H.- *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FILHO, E. A. *Funções Aritméticas, Números Notáveis*. São Paulo, SP: Nobel, 1988.

LOPES, G. L. de O. *A Criatividade Matemática De John Wallis Na Obra Arithmetica Infinitorum: Contribuições Para Ensino De Cálculo Diferencial E Integral Na Licenciatura Em Matemática.* Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação, UFRN, 2017.

LOPES, G. L. O., LOPES, J. S.. A*nálise Matemática na formação do professor: uma reflexão sobre o seu ensino*, In: Congresso Nacional de Educação, III, 2016. NATAL, RN. Editora Realize, 2016.

MENDES, I. A. *Cognição e criatividade na investigação em história da Matemática: contribuições para a Educação Matemática*. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 6, n. 1, p. 185-284, abril 2015.

MILIES, F. C.; BUSSAB, J. H. *A Geometria na Antiguidade Clássica*. São Paulo: FTD, 1999.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. S. *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 116 p.

TALL, D. The Psychology of advanced mathematical thinking. In.: TALL, D. (Org.) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

VALDÉS, J. E. N.,MENDES, I. A., FOSSA, J. A., *A História como um agente de cognição na Educação Matemática.* Porto Alegre: Sulina, 2006. 182p.