ISSN: 2358-8829

ENGENHARIA DIDÁTICA E AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI À LEONARDO: UM PANORAMA HISTÓRICO-EVOLUTIVO

Milena Carolina dos Santos Mangueira[1]
Renata Passos Machado Vieira[2]
Francisco Regis Vieira Alves[3]

RESUMO

Os estudos sobre sequências numéricas na história da matemática são explorados, focalizando o contexto histórico e evolutivo, especialmente na conhecida sequência de Fibonacci, enquanto outras sequências semelhantes permanecem menos conhecidas. Nesse contexto, abordamos a sequência de Leonardo, ressaltando elementos do processo histórico e evolutivo de sua construção. Em busca de apresentar uma abordagem deste tema voltada as licenciaturas, visando formalizar este conteúdo matemático, adotamos a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática em suas duas primeiras fases – análises preliminares e análise *a priori* -, e a teoria de ensino, Teoria das situações Didáticas no intuito de proporcionar uma visão prática e aplicável para o ensino de matemática. Inicialmente, em nossa análise preliminar, conduzimos uma breve análise da sequência de Leonardo, enfatizando elementos do seu desenvolvimento histórico e evolutivo. Apresentamos uma discussão sobre definições, representação matricial e a intrincada relação entre os números de Fibonacci e Leonardo, enriquecendo o entendimento do campo epistêmico-matemático do tema. A análise *a priori* deste trabalho debruça-se sobre aspectos que mostram a robustez e relevância do estudo e, tendo em vista os pressupostos da Engenharia Didática, amparadas pelas quatro fases da teoria de ensino, voltada para a formação inicial do professor de matemática. Almejamos ainda, em um possível contexto de replicação desta sequência, verificar as possibilidades de aplicações práticas destas sequências, principalmente na sequência de Leonardo, bem como que contribuições relevantes estas sequências podem trazer para o conhecimento do futuro professor, considerando as implicações práticas para o ensino e aprendizagem de sequências numéricas.

Palavras-chave: Engenharia Didática, Sequência de Leonardo, Sequência de Fibonacci.

INTRODUÇÃO

A história das sequências numéricas na matemática é um campo de estudo vasto e diversificado, em que algumas sequências, como a de Fibonacci, ganharam destaque significativo devido à sua presença em diversas áreas do conhecimento, desde a Biologia até a Arte. No entanto, outras sequências, como a sequência de Leonardo, criada pelo

[1] Doutoranda em Ensino (RENOEN) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, milenacarolina24@gmail.com;
[2] Doutoranda em Ensino (RENOEN) pela Universidade Federal do Ceará - UFC, re.passosm@gmail.com;
[3] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará - UFC, fregis@ifce.edu.br.

ISSN: 2358-8829

matemático italiano Leonardo Pisano (1180-1250), permanecem menos conhecidas, apesar de sua relevância e de suas propriedades matemáticas intrigantes. A sequência de Leonardo compartilha várias características com a de Fibonacci, como a relação recursiva que gera seus termos, e vem despertando um interesse crescente na comunidade acadêmica, especialmente nos últimos anos.

Este estudo visa explorar a sequência de Leonardo, destacando seu desenvolvimento histórico, suas inter-relações com outras sequências numéricas e suas potenciais aplicações no Ensino de Matemática. A abordagem adotada para este fim é fundamentada na Engenharia Didática (ED) e na Teoria das Situações Didáticas (TSD).

A ED é uma metodologia de pesquisa que permite a construção e análise de situações didáticas, oferecendo um arcabouço teórico robusto para prever e superar desafios que possam surgir no processo de ensino (Artigue *et al.*, 1995). De modo complementar, a TSD oferece um modelo de interação entre o aluno, o conhecimento e o meio (Brousseau, 1986), fundamentais para o desenvolvimento do conhecimento matemático. A TSD pode promover um ambiente onde o aluno assume um papel ativo na construção de seu conhecimento.

Neste contexto, a sequência de Leonardo é abordada como um objeto de estudo matemático e, simultaneamente, como uma ferramenta didática que visa enriquecer o Ensino de Matemática, especialmente na formação de futuros professores. Este trabalho pretende, assim, contribuir para a formação inicial de professores de matemática, proporcionando uma visão prática e aplicável das sequências numéricas, que vai além do tradicional ensino da sequência de Fibonacci, explorando novas possibilidades pedagógicas e ampliando o repertório didático dos educadores.

REFERENCIAL TEÓRICO

As sequências têm sido amplamente exploradas na literatura matemática ao longo dos anos, devido à sua vasta aplicabilidade em diversos contextos. Uma sequência recursiva linear é definida como aquela em que seus termos são gerados por uma fórmula de recorrência, que permite calcular cada termo subsequente a partir de seus predecessores diretos, resultando em um número ilimitado de termos. Contudo, essa recorrência não é a única forma de definir sequências recursivas lineares, sendo ainda essencial conhecer seus elementos iniciais (Vieira *et al.*, 2022).

A sequência de Fibonacci foi criada pelo matemático italiano Leonardo Pisano (1180-1250), conhecido por “filho de Bonacci”, sendo introduzida na Europa durante a Idade Média, em meio ao movimento das cruzadas, com o propósito de planejar ataques contra os muçulmanos no Egito. Leonardo também adquiriu conhecimentos em Álgebra e Aritmética, sendo lembrado pelo problema da reprodução dos coelhos imortais, que resultou na criação da sequência que carrega o seu nome (Posamentier; Lehmann, 2007).

Esta sequência é uma das mais exploradas e estudadas entre todas, devido a sua presença em diversas áreas. Além disso, sua relação de recorrência figura como modelo para a criação de outras sequências, por meio da modificação de coeficientes e termos iniciais. Dessa forma, a sequência de Fibonacci está intrinsecamente relacionada a outras sequências, com as quais compartilha propriedades e identidades matemáticas, sendo um exemplo notável dessa relação a sequência de Leonardo.

A sequência de Leonardo foi inicialmente apresentada por Sloane (1973) e, posteriormente, por Catarino e Borges (2019) e nesse intervalo temporal praticamente não há registros de estudos sobre ela. No entanto, após 2019, houve um crescente interesse na investigação da sequência de Leonardo e de seus números. Historicamente, há poucas informações sobre a origem da sequência, mas acredita-se que tenha sido criada por Leonardo Pisano, já que leva seu nome e possui notáveis semelhanças com a sequência de Fibonacci, incluindo uma relação direta entre seus números (Mangueira, 2022).

"O crescente interesse pela sequência de Leonardo nos últimos anos levou à generalização e complexificação dessa sequência por diversos pesquisadores, como Shannon (2019), Alp e Koçer (2021), Vieira, Alves e Catarino (2022), Prasad *et al.* (2023) e Mangueira, Alves e Catarino (2024). Além disso, estudos como os de Vieira, Alves e Catarino (2023) e Isbilir, Akyigit e Tosun (2023) exploram seu modelo combinatório e suas relações com outras sequências, culminando na criação de uma sequência mista.

Essa sequência também tem sido objeto de estudo na área de ensino, como trazem Alves *et al.* (2021), Mangueira *et al.* (2021) e Mangueira (2022). Essas pesquisas destacam a relevância desta sequência, tanto no avanço teórico quanto em aplicações pedagógicas, evidenciando seu impacto multifacetado no campo da Matemática.

METODOLOGIA

Nesta seção abordamos brevemente a teoria de ensino que embasa a situação didática a ser apresentada nos resultados deste trabalho, que é a Teoria das Situações

ISSN: 2358-8829

Didáticas, bem como a metodologia de pesquisa empregada para este fim, que foi a Engenharia Didática.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida na década de 1960 na França por Guy Brousseau. Almouloud (2007) explica que a TSD visa criar um modelo de interação entre o aluno, o conhecimento e o meio (*milieu*). Teixeira e Passos (2013) acrescentam que o foco principal da TSD não é o sujeito cognitivo, mas sim a própria situação didática, onde as interações entre professor, aluno e saber são fundamentais. Nessa perspectiva, os erros cometidos pelos alunos são considerados fontes de informação, e podem ser usados para a elaboração de questões mais eficazes ou para o desenvolvimento de novas situações que atendam melhor aos objetivos pedagógicos.

Brousseau (1986) estruturou a Teoria das Situações Didáticas (TSD) em quatro etapas distintas: ação, formulação, validação e institucionalização. As três primeiras etapas são denominadas situações adidáticas, onde o aluno é o principal agente de seu próprio aprendizado, interagindo de maneira autônoma com o ambiente, enquanto na institucionalização, o professor retoma o centro na condução do processo de ensino.

Na fase de ação, é apresentada uma situação de ensino que desafia o aluno a aplicar seus conhecimentos prévios na busca de soluções para o problema proposto. Nessa etapa, espera-se que o aluno se envolva ativamente na atividade, executando ações práticas e imediatas para resolver o desafio (Vieira; Alves; Catarino, 2019).

A fase de formulação tem como objetivo principal a troca de informações entre os alunos, que pode ocorrer por meio de mensagens escritas ou orais, utilizando linguagem natural ou matemática. Durante essa etapa, os alunos têm a oportunidade de desenvolver modelos teóricos mais elaborados e de explicar as estratégias utilizadas para chegar às suas soluções (Alves *et al*., 2019).

Na fase de validação, o aluno deve demonstrar a consistência do modelo que desenvolveu, fornecendo justificativas sólidas, como explicações, provas ou demonstrações, que comprovem a relevância do modelo para o grupo de estudo. Além disso, é benéfico compartilhar as soluções e discussões com todos os alunos e o professor, promovendo uma construção coletiva do conhecimento (Brousseau, 1986).

Finalmente, na fase de institucionalização, o professor apresenta de forma clara e formal as intenções e objetivos das situações-problema. Nessa etapa, o professor define o status cognitivo do conhecimento, facilitando a transposição do saber individual para o âmbito do conhecimento científico (Almouloud, 2007).

ISSN: 2358-8829

A Engenharia Didática (ED) é uma metodologia de pesquisa que, assim como a TSD, tem origem francófona, e foi desenvolvida para construir e analisar situações didáticas, dando suporte à implementação da TSD. Artigue *et al*. (1995) comparam a ED ao trabalho de um engenheiro, que se baseia em conhecimentos científicos e aceita um controle científico, embora precise lidar com problemas mais complexos do que aqueles abordados pelas ciências tradicionais. Essa metodologia permite que o professor antecipe obstáculos e desafios em situações de ensino, funcionando como um modus operandi para a investigação e análise dessas situações (Alves; Dias, 2017).

A ED é estruturada em quatro etapas: (i) análises preliminares; (ii) concepção e análise *a priori*; (iii) experimentação; e (iv) análise *a posteriori* e validação, descritas de forma resumida no Quadro 1:

Quadro 1: Etapas da Engenharia Didática.

Etapa	Descrição
Análises preliminares	Nesta fase realiza-se um levantamento bibliográfico acerca do quadro teórico didático, isto é, uma análise epistemológica dos conteúdos e do ensino atual, levantamento dos prévios dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos e uma análise do campo onde vai situar-se a realização didática.
Concepção e analise *a priori*	Nesta segunda fase, o pesquisador delimita as variáveis didáticas (globais e locais) sobre as quais o ensino pode atuar, a fim de guiar a pesquisa e propor um plano de ação, bem como ocorre a preparação da sequência de ensino e a previsibilidade de possíveis comportamentos com base nas variáveis didáticas determinadas.
Experimentação	Nesta fase ocorre a aplicação das situações didáticas ou sequência didática elaboradas *a priori*. Firma-se também o contrato didático com os sujeitos envolvidos no processo e ocorre a coleta dos dados relativos à pesquisa.
Análise *a posteriori* e validação	Esta última fase apoia-se sobre todos os dados coletados durante a experimentação. A partir da análise dos dados, faz-se necessário um confronto destes com o que foi previsto anteriormente na analise *a priori*, para assim, fazer a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação.

Fonte: Sousa (2022, p. 52).

Destaca-se que a validação dos dados pode ser realizada de duas formas: interna ou externa. Na validação interna, são analisados exclusivamente os dados das turmas onde a Engenharia Didática foi aplicada. Já na validação externa, considera-se tanto as turmas que adotaram a Engenharia Didática quanto aquelas que não utilizaram essa metodologia, permitindo a comparação entre os resultados obtidos e os resultados esperados (Barros *et al*., 2020, p. 421-422).

Na próxima seção, apresentamos em detalhe o trajeto metodológico deste estudo, baseado nos pressupostos da ED.

ISSN: 2358-8829

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Análise Preliminar

Com base na crescente exploração da sequência de Leonardo na literatura de matemática pura, é possível apresentar várias definições e características associadas a esses números. A seguir, discutimos algumas dessas definições.

Catarino e Borges (2019) descrevem a sequência de Leonardo como uma sequência de segunda ordem não homogênea e, a partir de manipulações algébricas, é possível apresentar uma segunda relação de recorrência homogênea de terceira ordem.

Definição 1. A relação de recorrência não homogênea e homogênea, respectivamente, da sequência de Leonardo são definidas por:

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2,$$

$$Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3},\ n \geq 3.$$

sendo $Le_0 = Le_1 = 1$ e $Le_2 = 3$ seus termos iniciais.

A partir desta relação de recorrência, tem-se que os primeiros termos da sequência de Leonardo são:

Le_0	Le_1	Le_2	Le_3	Le_4	Le_5	Le_6	Le_7	...
1	1	3	5	9	15	25	41	...

Assim, é possível encontrar uma relação matemática entre os números de Leonardo e os números de Fibonacci, dada por $Le_n = 2F_{n+1} - 1,\ n \geq 0.$ A equação característica desta sequência é uma cúbica, representada algebricamente por $x^3 - 2x + 1 = 0,$ com três raízes reais, que são: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{5},$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{5}$ e $x_3 = 1.$ Uma destas raízes é o valor aproximado de 1,61, conhecido como o *número de ouro*.

Proposição 1. A função geradora da sequência de Leonardo, para $1 - 2x - x^3 \neq 0,$ é dada por (Catarino, 2019, p. 10):

$$G_{Le_n} = \frac{1 - x + x^2}{1 - 2x + x^3}.$$

Proposição 2. A fórmula de Binet da sequência de Leonardo, para $n \geq 0,$ é dado por (Catarino, 2019, p. 4):

ISSN: 2358-8829

$$Le_n = 2\left(\frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}\right) - 1 = \frac{x_1(2x_1^n - 1) - x_2(2x_2^n - 1)}{x_1 - x_2},$$

sendo Le_n o n-ésimo termo da sequência de Leonardo, x_1 e x_2 as raízes da equação característica.

Teorema 1. A forma matricial dos números de Leonardo é dada por (Vieira *et al.*, 2020, p. 4-5):

Para $Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Le_3 & Le_2 & Le_1 \end{bmatrix},$

tem-se que $Q^n = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Le_{n+2} & Le_{n+1} & Le_n \end{bmatrix},\ n \geq 1.$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se que: Para $n = 1,\ Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Le_3 & Le_2 & Le_1 \end{bmatrix}$, assim, a igualdade

é válida. Supondo que seja válido para $n = k,\ k \in \mathbb{N},$ temos que:

$$Q^k = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Le_{k+2} & Le_{k+1} & Le_k \end{bmatrix}$$

Agora, verificando a validade para $n = k + 1.$

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Le_{k+2} & Le_{k+1} & Le_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Le_{k+2} - Le_k & Le_{k+2} & Le_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Le_{k+3} & Le_{k+2} & Le_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Definição 2. A fórmula de recorrência dos números de Leonardo, com índices negativos, é dada por:

ISSN: 2358-8829

$$Le_{-n} = 2Le_{-n+2} - Le_{-n+3},\ n \geq 1.$$

Teorema 2. A forma matricial dos números de Leonardo para o campo dos inteiros não positivos, é dada por (Vieira *et al.*, 2020, p. 7-8):

Para $G = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Le_1 & Le_0 & Le_{-1} \end{bmatrix}$,

tem-se que $G^n = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Le_{-n+2} & Le_{-n+1} & Le_{-n} \end{bmatrix},\ n \geq 1.$

em que a sua demonstração segue de forma análoga ao Teorema 1.

Na próxima subseção desenvolvemos duas situações didáticas com base nos teoremas apresentados sobre a sequência de Leonardo, utilizando as fases da TSD, no intuito de estimular os estudantes da licenciatura a conhecer esta sequência e elaborar estratégias de resolução para as situações, partindo de seus conhecimentos prévios.

Concepção e análise *a priori*

Situação didática 1: A sequência de Fibonacci, que incorpora a recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \geq 1$ e os termos iniciais $F_0 = F_1 = 1$, possui várias propriedades e conexões com outras sequências. Em especial, é possível estabelecer uma relação entre os números de Fibonacci e de Leonardo. A seguir, apresente essa relação entre os dois conjuntos numéricos.

Na etapa de ação, os alunos são incentivados a explorar as sequências previamente apresentadas, aplicando deduções matemáticas e observando o comportamento dos números. O objetivo é identificar um padrão entre os termos e estabelecer uma relação entre eles.

Durante a fase de formulação, espera-se que os alunos investiguem as sequências de Fibonacci e Leonardo, apresentando os seguintes termos dessas sequências:

Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Leonardo: 1, 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, 67, 109, ...

ISSN: 2358-8829

Consequentemente, por meio de manipulações algébricas e deduções matemáticas, espera-se que os alunos reconheçam que um termo da sequência de Leonardo é igual a duas vezes o termo subsequente da sequência de Fibonacci, menos 1. Em outras palavras, é importante que os alunos cheguem à seguinte expressão: $Le_n = 2F_{n+1} - 1$.

Na fase da validação, espera-se que os alunos utilizem o princípio de indução finita para demonstrar o resultado encontrado. Assim, espera-se que:

Para $n = 0$, tem-se que $Le_0 = 2F_1 - 1 \Rightarrow Le_0 = 2.1 - 1 \Rightarrow Le_0 = 1$.

Supondo que a igualdade é válida para todo $n = k$, temos $Le_k = 2F_{k+1} - 1$. Agora, é necessário provar que é válido para $n = k + 1$. Utilizando a relação de recorrência não homogênea de Leonardo ($Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$), tem-se que:

$$\begin{aligned} Le_{k+1} &= Le_k + Le_{k-1} + 1 \\ &= (2F_{k+1} - 1) + (2F_k - 1) + 1 \\ &= 2(F_{k+1} + F_k) - 1 \\ &= 2F_{k+2} - 1 \end{aligned}$$

$\square$

Na fase de institucionalização, o professor revisita a situação, abordando as questões dos alunos, esclarecendo dúvidas e validando as respostas fornecidas. É essencial promover um diálogo aberto, permitindo a troca de ideias e ouvindo também os raciocínios equivocados apresentados pelos alunos.

Situação didática 2: Com base na relação de recorrência da sequência de Leonardo e nos seus termos iniciais, determine a recorrência para os termos de índices negativos e apresente os cinco primeiros termos dessa sequência.

Na fase de ação, com base na sequência de Leonardo e sua relação de recorrência, espera-se que os alunos expandam essa sequência para incluir números negativos, resultando nos valores: -1, 1, -3, 3, -7, 9, -17, 25, -43...

Durante a fase de formulação, espera-se que os alunos compreendam que, ao utilizar a recorrência inicial ($Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3}$) e ao considerar $n = 2$, eles podem encontrar a seguinte relação $Le_2 = 2Le_1 - Le_{-1} \Rightarrow Le_{-1} = 2Le_1 - Le_2 \therefore Le_{-1} = -1$. Da

ISSN: 2358-8829

mesma forma, ao determinar os próximos termos desejados, é esperado que os alunos cheguem às seguintes conclusões:

$$
\begin{aligned}
&Le_{-1} = 2Le_1 - Le_2 \;\therefore\; Le_{-1} = -1;\\
&Le_{-2} = 2Le_0 - Le_1 \;\therefore\; Le_{-2} = 1;\\
&Le_{-3} = 2Le_{-1} - Le_0 \;\therefore\; Le_{-3} = -3;\\
&Le_{-4} = 2Le_{-2} - Le_{-1} \;\therefore\; Le_{-4} = 3;\\
&Le_{-5} = 2Le_{-3} - Le_{-2} \;\therefore\; Le_{-5} = -7.
\end{aligned}
$$

Por fim, na fase de validação, espera-se que os alunos reconheçam a relação entre os números encontrados e formalizem a recorrência de Leonardo para índices negativos, apresentando $Le_{-n} = 2Le_{-n+2} - Le_{-n+3},\ n \geq 1.$

Na fase de institucionalização, o professor deve revisar a situação com o propósito de examinar as soluções obtidas e confirmá-las, esclarecendo o objetivo da atividade proposta e ressaltando seu aspecto de desenvolvimento matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho realizou uma exploração da sequência de Leonardo, destacando tanto seu contexto histórico quanto sua relevância para o ensino de matemática. Ao longo do estudo, foi possível evidenciar que, embora menos conhecida que a sequência de Fibonacci, a sequência de Leonardo possui propriedades matemáticas que a tornam uma ferramenta importante para o desenvolvimento do pensamento matemático, especialmente no que diz respeito à compreensão de relações recursivas e à aplicação de conceitos algébricos e matriciais.

A utilização da ED e a TSD como referenciais teóricos proporcionou uma base metodológica sólida para a concepção e análise de situações didáticas envolvendo a sequência de Leonardo. A Engenharia Didática permitiu uma previsão estruturada dos desafios que podem surgir em seu processo de ensino, enquanto a TSD ofereceu um modelo para a interação entre o aluno, o conhecimento e o ambiente de aprendizagem, facilitando a construção do conhecimento matemático.

Os resultados obtidos indicam que a sequência de Leonardo pode ser incorporada ao currículo de formação de professores como um complemento para a continuidade do ensino tradicional de sequências numéricas. A análise realizada neste estudo mostra que a sequência de Leonardo pode ampliar o repertório matemático dos futuros professores,

ISSN: 2358-8829

contribuindo para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas que podem ser aplicadas em sala de aula, promovendo um ensino de matemática mais dinâmico e contextualizado.

Assim, este trabalho oferece uma contribuição significativa para o campo da Educação Matemática, especialmente no que diz respeito à formação de professores, e sugere a necessidade de futuras pesquisas que continuem a explorar as possibilidades pedagógicas das sequências numéricas, em particular aquelas menos convencionais como a sequência de Leonardo. Essas investigações poderão aprofundar ainda mais a compreensão sobre o impacto dessas sequências no ensino e na aprendizagem, fortalecendo a base teórica e prática da Didática da Matemática.

AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento da pesquisa contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP).

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A. Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 12, n. 2, p. 192-209, 2017.

ALVES, F. R. V. *et al*. Engenharia Didática para o ensino da Sequência de Padovan: um estudo da extensão para o campo dos números inteiros. **Ensino de ciências e educação matemática**, v. 3, 2019.

ALVES, F. R. V. *et al*. Didactic engineering to teach Leonardo sequence: A study on a complexification process in a mathematics teaching degree course. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 16, n. 3, p. em0655, 2021.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. UFPR, 2007.

ALP, Y.; KOÇER, E. G. Some properties of Leonardo numbers. **Konuralp J. Math**, v. 9, n. 1, p. 183–189, 2021.

ARTIGUE, M. *et al*. **Ingenieria didactica en educacion matematica**: un esquema para la investigacion y la innovacion en la enseñanza y el aprendizaje de las matematicas. Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1995.

BARROS, F. E. *et al*. Hibridização dos números triangulares: uma análise preliminar e a priori e a visualização por meio do software GeoGebra. **Indagatio Didactica**, v. 12, n. 3, p. 411-436, 2020.

BROUSSEAU, G. La relation didactique: le milieu. **Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques**, n. 2/3, p. 54-68, 1986.

ISSN: 2358-8829

CATARINO, P. M.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75-86, 2019.

GÖKBAŞ, H. A new family of number sequences: Leonardo-Alwyn numbers. **Armenian Journal of Mathematics**, v. 15, n. 6, p. 1-13, 2023.

ISBILIR, Z.; AKYIGIT, M.; TOSUN, M. Pauli-Leonardo quaternions. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 29, p. 1–16, 2023.

MANGUEIRA, M. C. d. S. *et al*. Uma experiência da engenharia didática no processo de hibridização da sequência de Leonardo. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, v. 10, n. 02, p. 271–297, 2021d.

MANGUEIRA, M. C. d. S. **Engenharia Didática: Um processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas**. Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE – Campus Fortaleza, 2022.

MANGUEIRA, M. C. D. S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Sequência de Hexa-Leonardo: uma extensão da sequência de Leonardo. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 1, 2024.

PRASAD, K.; MOHANTY, R.; KUMARI, M.; MAHATO, H. Some new families of generalized k-Leonardo and gaussian Leonardo numbers. **Communications in Combinatorics and Optimization**, Azarbaijan Shahid Madani University, 2023.

POSAMENTIER, Alfred S.; LEHMANN, Ingmar. **The fabulous Fibonacci numbers**. Prometheus Books, 2010.

SHANNON, A. A note on generalized Leonardo numbers. **Note on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 97–101, 2019.

SLOANE, N. J. A. **A handbook of integer sequences**. [S.l.]: Academic Press, 1973.

SOUSA, R. T. de. **Categorias do raciocínio intuitivo e o ensino de parábolas em geometria analítica com aporte do software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, v. 21, n. 39, p. 155–168, 2013.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma Exploração da Sequência de Padovan num curso de Licenciatura em Matemática. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 4, p. 261-280, 2019.

VIEIRA, R. P. M. *et al*. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e natura**, v. 42, p. e100-e100, 2020.

VIEIRA, R. P. M. *et al*. Application of the BenTaher-Rachidi method in numerical sequences. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, 2022.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalização dos sedenios de Leonardo e Narayana. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2022.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A note on Leonardo's combinatorial approach. **Journal of Instructional Mathematics**, v. 4, n. 2, p. 119-126, 2023.