ISSN: 2358-8829

ENCONTRANDO O VALOR APROXIMADO DE PI COM O GEOGEBRA

Letícia da Silva Costa [1]
Josefa Itailma da Rocha [2]

INTRODUÇÃO

Em um círculo o comprimento de uma circunferência dividido pelo seu diâmetro é constante. Esse valor é o número irracional π , que é uma das constantes matemáticas mais conhecidas e importantes, pois aparece em vários contextos da matemática e de outras ciências. O problema de encontrar aproximações do valor é discutido desde a antiguidade. Os Babilônios (1900–1600 a.C.) usavam $\pi \cong 3{,}125$ obtido a partir de cálculos práticos com círculos. Os Egípcios (1650 a.C.) no *Papiro de Rhind* apresenta cálculos equivalentes a $\pi \cong 3{,}1601$. A primeira demonstração rigorosa que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é constante, foi feita pelo matemático grego Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) que também calculou uma aproximação de π usando polígonos inscritos e circunscrito em um círculo. Usando um polígono de 96 lados, Arquimedes conseguiu mostrar que $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$, alcançando uma precisão impressionante para a época. Atualmente, com o uso de supercomputadores, é possível encontrar aproximações de π com trilhões de casa decimais. A melhor aproximação do valor de π foi obtida em 2022 por uma equipe do Google Cloud, liderada por Emma Haruka Iwao, que conseguiu calcular o valor de π com 100 trilhões de casas decimais.

Neste trabalho apresentaremos duas maneiras de encontrar aproximações de π, o método clássico de Arquimedes e o método de Monte Carlos, e faremos a programação no GeoGebra para verificar os resultados teóricos apresentados.

METODOLOGIA

O trabalho foi desenvolvido através de pesquisa bibliográfica em livros, revistas e trabalhos publicados sobre o tema. Foi feita também uma simulação no GeoGebra para visualizar os métodos de aproximação estudados.

[1] Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, costaletic31@gmail.com;
[2] Professora da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, itailma@mat.ufcg.edu.br;

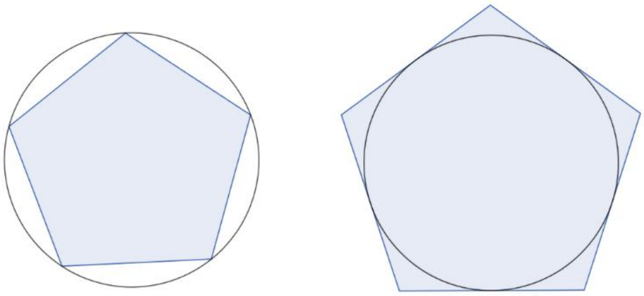
ISSN: 2358-8829

REFERENCIAL TEÓRICO

O método de Arquimedes

Dizemos que um poligono P está inscrito em uma circunferênica C se os vertices de P estão sob o círculo C. Dizemos também que P está circunscrito em C se os lados de P são tangentes a C. Na figura abaixo, mostramos um pentágono inscrito e um circunscrito.

Figura 1 – Pentágono inscricrito e circunscrito



Fonte: Elaborado pelas autoras (2025)

Claramente, o perímetro P_1 do poligono inscrito é menor que o comprimento da circunferência, enquanto o perimétro P_2 do polígono circunscrito é maior que o comprimento da circunferência. Considerando um círculo de raio 1, temos o que o comprimento da circunferência é dado por 2π, assim

$$\frac{P_1}{2} < \pi < \frac{P_2}{2}. \tag{1}$$

Arquimédes começou com polígono regulares de 6 lados e foi dobrando a quantidade de lados até chegar em 96.

O método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é uma técnica matemática que utiliza a aleatoriedade para resolver problemas complexos. Baseado em conceitos de estatística e probabilidade, ele faz uso da Lei dos Grandes Números para garantir que os resultados obtidos por simulação se aproximem dos valores esperados.

Para encontrar uma aproximação de π o métode de Monte Carlo usa como base a probabilidade geometrica comparando a área do círculo com a de um quadrado circunscrito. Considere um quadrado de lado $2r$ circunscrito a um círculo de raio r. Se gerarmos aleatoriamente pontos dentro do quadrado, a probabilidade de um ponto cair dentro do círculo é dada pelo quociente das áreas:

$$P(ponto\ cair\ no\ círculo) = \frac{área\ do\ círculo}{área\ do\ quadrado} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Para estimar essa razão entre as áreas, vamos usar o método de Monte Carlo. Gerando n pontos aleatórios dentro do quadrado e contando quantos deles caem dentro do círculo, digamos m pontos, então, pela Lei dos Grandes Números, temos

$$\frac{m}{n} \approx \frac{área\ do\ círculo}{área\ do\ quadrado} = \frac{\pi}{4}$$

Portanto,

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{m}{n} = 4 \cdot \frac{quantidade\ de\ pontos\ no\ círculo}{quantidade\ total\ de\ pontos}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Construção no GeoGebra do Método de Arquimedes:

Usaremos um controle deslizante para definir o número de lados dos inscritos e circunscrito. Vamos iniciar com a construção dos poligonos inscritos.

1. Construir o ponto $P(0,0)$
2. Construir o círculo c com centro em P e raio 1: *Circulo(P,1)*
3. Definr um ponto A arbitrátio fora do círculo
4. Tracar a segmento de reta r com extremidades em P e A: *r=Segmento(P,A)*
5. Definir o B como sendo a interseção de c e r: *Interseção(c,r)*
6. Criar um controle deslizante n definido de 3 a 96, com incremento de 1
7. Criar o conjunto V formado por n pontos sobre o círculo dados pela rotação do ponto B em $\frac{360°}{n}$: $V = Sequência\left(Girar\left(B, k \cdot \frac{360°}{n}\right), k, 1, n\right)$
8. Construir os polígonos inscritos no círculo com vértices no conjunto V: $PI = Polígono(V)$

Para a construção dos poligono circuscrito, vamos seguir os seguinte passos:

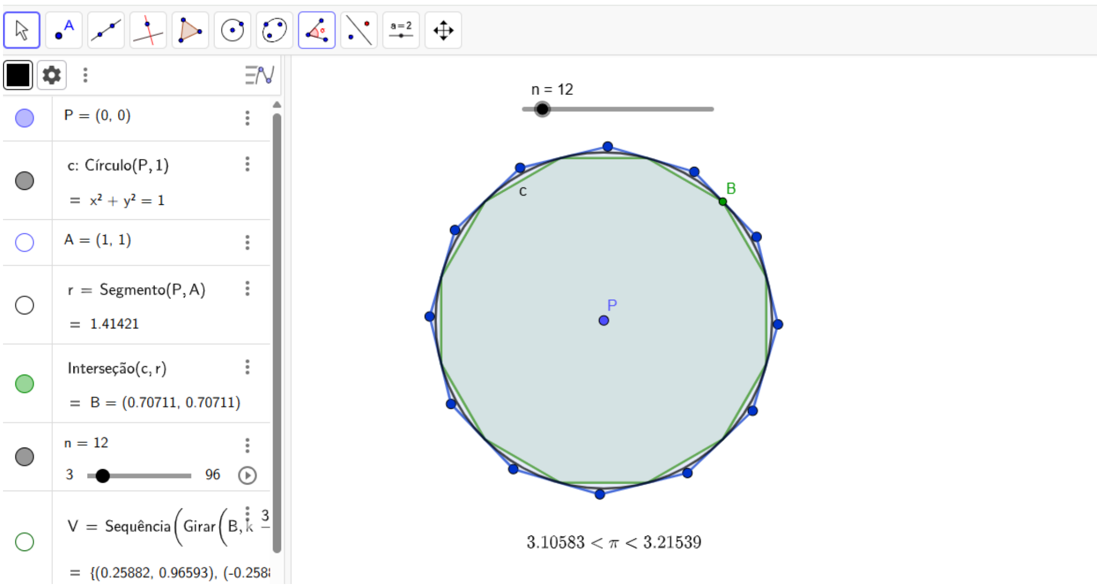
1. Definir um ponto C arbrtrário fora do círculo;

ISSN: 2358-8829

2. Criar o conjunto o conjunto W formado por n pontos fora do círculo dados pela rotação do ponto C em $\frac{360°}{n}$: $W = Sequência(Girar\left(C, k \cdot \frac{360°}{n}\right), k, 1, n)$
3. Criar as retas tangentes ao círculo que passa pelos pontos do conjunto W: $retas = Sequência(Tangente(Elemento(W, k), c), k, 1, n)$
4. Construir os vértices do polígono que são dados pela interseção de dois elementos seguidos da lista $retas$:
$Sequência\ (Interseção\ (Elemento(retas, k), Elemento(retas, k + 1)), k, 1, n - 1)$
5. Construir uma lista $vértices$ com todos os vértices do poligono acrescentando a lista $vert$ o ponto de interseção da primeira com a última reta da lista $retas$:
$vértices = Anexar(vert, Interseção(Elemento(retas, 1), Elemento(retas, n)))$
6. Construir o poligono circunscrito com vértices no conjunto $vertices$: $PC = Polígono(vértices)$

Por fim, criamos uma caixa de texto que mostra a aproximação de π dada pela Equação (1). Na Figura 2 apresentamos o polígono de 12 lados inscrito e circunscrito com a aproximação de π obtida.

Figura 2 – Método de Arquimesdes construido no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelas autoras (2025)

Construção no GeoGebra do Método de Monte Carlo:

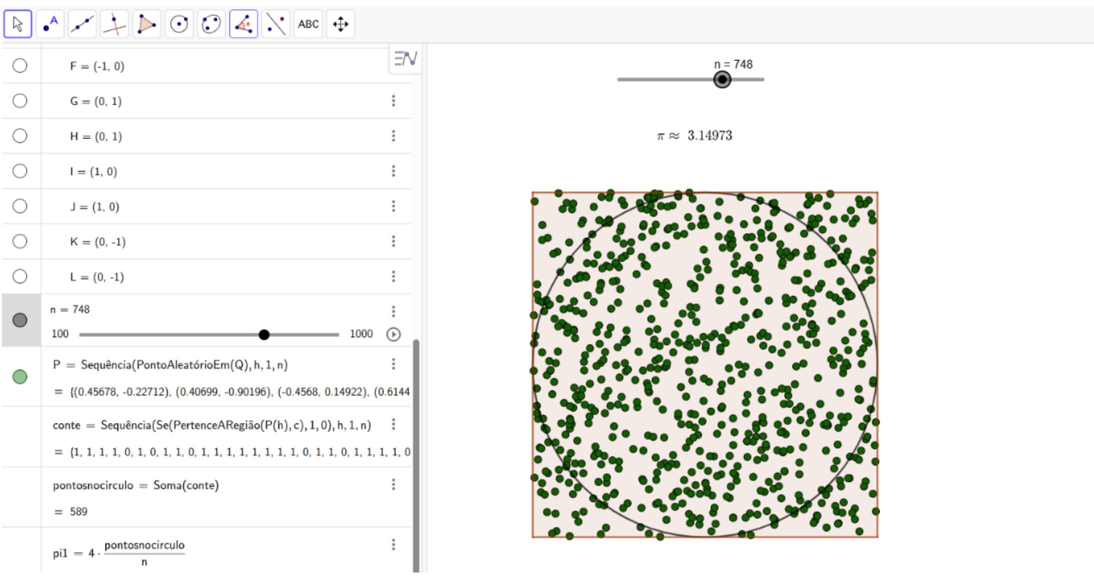
Para simplificar, a contrução no GeoGebra foi feita com um círculo de raio 1 e um quadrado de lado 2. Usaremos um controle deslizante para controlar o número de pontos gerados aleatoriamente.

ISSN: 2358-8829

1. Construção do círculo c de raio 1 centrado na origem: $c: Círculo((0,0),1)$
2. Construir os pontos que serão vérticies do quadrado: $A = (-1,-1), B = (-1,1), C = (1,1), D = (1,-1)$
3. Construir o quadrado Q com vértices nos pontos A, B, C, D: $Q = Polígono(A, B, C, D)$
4. Construir o controle deslizante n definido de 1 a 1000
5. Gerar o conjunto P de pontos aleatórios no quadrado:
$$P = Sequência(PontoAleatórioEm(Q), h, 1, n)$$
6. Para contar os pontos que cairam dentro do círculo, vamos criar uma que irá examinar cada ponto de P, se esse ponto pertence a c, o elemento da sequência será 1, se não, o elemento será 0.:
7. $conte = Sequência(Se(PertenceARegião(P(n), c), 1,0), h, 1, n)$
8. Para saber quantos pontos pertencem ao círculo, basta somar os elementos da sequência $conte$: $pontosnocírculo = Soma(conte)$
9. A aproximação de π é dada por: $\pi = 4 \cdot \frac{pontosnocírculo}{n}$

Na Figura 3 apresentamos uma simulação para 748 pontos onde foi obtida uma estimativa de $\pi = 3{,}14973$.

Figura 3 – Método de Monte Carlo construido no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelas autoras (2025)

ISSN: 2358-8829

Vale observar que o método de Monte Carlo é um método probabilístico e depende da distribuição dos pontos, assim a aproximação pode variar em cada simulação. Para ter uma estabilidade na simulação é necessário gerar um grande número de pontos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho apresentamos dois métodos para encontrar aproximações do número π. Sendo π uma das constantes matemáticas mais conhecidas, estudar aproximações do seu valor é uma interessante estratégia didática. No método de Arquimedes destacamos o seu potencial de relação com a história da matemática ao apresentar a biográfia e os trabalhos de um dos maiores matemáticos, além da sua relação com a geometria onde se pode explorar o conceito de perímetro e o estudo de polígonos regulares. Já o método de Monte Carlo estabelece uma conexão entre geometria, estatística e probabilidade. Além disso, o uso do GeoGebra possibilita a visualização e a experimentação interativa, facilitando o entendimento de ideias abstratas.

Palavras-chave: Número pi; Método de Arquimedes, Método de Monte Carlo, GeoGebra.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Programa de Educação Tutorial – PET/FNDE pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

IWAO, Emma Haruka. A bigger piece of the pi: Finding the 100-trillionth digit. Google Cloud Blog. Disponível em: <https://blog.google/products/google-cloud/new-digit-pi-2022/>. Acesso em: 15 set. 2025.

SOUZA, V. A. *Encontrando o valor de π com o método de Monte Carlo em Python*. Revista Eletrônica de Ciências Exatas, [S.l.], v. 1, n. 1, p. 1-10, 2025. Disponível em: <https://conferencias.unifoa.edu.br/exatas/article/view/2110/1906>. Acesso em: 18 set. 2025.

LIMA, *Louise dos Santos. O método de aproximação de Arquimedes com o uso do GeoGebra: uma abordagem histórica e didática.* Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 52-66, 2016. ISSN 2237-9657.