ISSN: 2358-8829

EQUILÍBRIO DE NASH: UMA ABORDAGEM APLICADA AO ENSINO DE MATEMÁTICA

Ana Beatriz Ferreira Leite de Farias [1]
Josefa Itailma da Rocha [2]

INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos é um campo da matemática aplicada que estuda situações de decisão estratégica, nas quais o resultado para cada indivíduo depende das escolhas dos demais participantes. Essa teoria possui aplicações em diversas áreas, como economia, biologia, ciência política e computação. Um jogo é dito não cooperativo quando os participantes não podem combinar uma estratégia conjunta, de modo que cada jogador toma suas decisões de forma independente, sem conhecer previamente a escolha do oponente.

Neste trabalho, discutimos o conceito de equilíbrio de Nash, proposto pelo matemático norte-americano John Nash em seu artigo Equilibrium Points in n-Person Games, no qual busca identificar estratégias estáveis em jogos não cooperativos. O equilíbrio de Nash corresponde a uma situação em que nenhum jogador pode obter vantagem ao alterar sua estratégia, assumindo que os demais mantêm as suas escolhas.

Para ilustrar esse conceito, analisamos diferentes jogos, discutindo as condições de existência do equilíbrio. Um dos exemplos mais clássicos da Teoria dos Jogos é o Dilema dos Prisioneiros, no qual dois indivíduos são interrogados separadamente e recebem a oferta de redução de pena caso delatem o companheiro. Sem possibilidade de comunicação, cada prisioneiro deve decidir entre cooperar ou trair, sem saber a decisão do outro, caracterizando um jogo não cooperativo.

Nesse contexto, buscamos determinar o equilíbrio do jogo e analisar suas implicações. A discussão de problemas contextualizados em sala de aula favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da capacidade de tomada de decisão, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa da matemática.

[1] Graduada pelo curso de Matemática na Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, beatriz.leite@estudante.ufcg.edu.br;
[2] Professora orientadora: Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo - USP, itailma@mat.ufcg.edu.br;

ISSN: 2358-8829

METODOLOGIA (OU MATERIAIS E MÉTODOS)

Inicialmente, realizou-se o estudo dos conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos, com ênfase nas estratégias dos jogadores, nos resultados associados às diferentes escolhas e na definição de Equilíbrio de Nash. Para fundamentar essa discussão, foram consideradas as referências bibliográficas relacionadas à temática, especialmente o trabalho de Sartini et al. (2004), sobre a introdução à Teoria dos Jogos, e o estudo de Ferreira e Santos (2017), que relaciona a delação premiada ao Equilíbrio de Nash.

Em seguida, foram examinados exemplos que permitem discutir as condições de equilíbrio em diferentes situações estratégicas. O jogo Pedra, Papel e Tesoura foi utilizado como exemplo de jogo que não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras, uma vez que, ao conhecer a jogada do jogador 1, o jogador 2 pode alterar unilateralmente sua estratégia para obter a vitória. Por sua vez, o Dilema dos Prisioneiros foi analisado considerando as alternativas disponíveis para cada participante e as consequências associadas às diferentes combinações de decisões. Nesse último caso, foram consideradas as penas estabelecidas no problema, buscando identificar a combinação de estratégias em que nenhum dos jogadores consegue melhorar individualmente seu resultado por meio de uma mudança unilateral.

Por fim, a partir da análise conceitual e matemática dos exemplos, foram discutidas as possibilidades de utilização da Teoria dos Jogos no ensino de Matemática, especialmente no trabalho com situações-problema, análise de estratégias e interpretação de resultados. Dessa maneira, o estudo busca evidenciar como os conceitos investigados podem contribuir para a compreensão de situações matemáticas contextualizadas e para a discussão de aspectos relacionados ao raciocínio lógico, à argumentação e ao pensamento crítico.

REFERENCIAL TEÓRICO

Na Teoria de Jogos, um jogo é constituído por um conjunto finito de jogadores, que denotaremos por $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, onde cada jogador possui um conjunto finito de estrat´egias puras denotado por $S_i = \{S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{im}\}$. O produto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n,$$

formado pelas estratégias puras dos jogadores é denominado de espaço de estratégias puras do jogo. Para cada jogador $g_i \in G$, existe uma função utilidade $u_i: S \to \mathbb{R}$ que associa o ganho (payoff) do jogador g_i no ponto $s \in S$.

Exemplo: Um dos jogos mais simples e conhecido é o de Pedra, Papel e Tesoura. Imagine 2 jogadores J_1 e J_2 jogando Pedra, papel e tesoura. O conjunto G dos jogadores é formado por $G = \{J_1, J_2\}$ e as estratégias possíveis para eles são:

$$S_{J_1} = S_{J_2} = \{Pedra\ (R), Papel\ (P), Tesoura\ (T)\}.$$

O conjunto S é dado então por:

$$S = \{(R,R),(R,P),(R,T),(P,R),(P,P),(P,T),(T,R),(T,P),(T,T)\}.$$

Um **equilíbrio de Nash** é uma situação em que nenhum jogador pode melhorar seu resultado ao mudar sozinho sua estratégia, mantendo as escolhas dos demais jogadores.

Exemplo: O jogo Pedra, Papel e Tesoura. O equilíbrio não ocorre porque, independentemente da escolha realizada por um jogador, o outro sempre pode alterar unilateralmente sua estratégia e obter uma vantagem.

Um jogo é dito **não cooperativo** quando os participantes não podem combinar uma estratégia conjunta, de modo que cada jogador toma suas decisões de forma independente, sem conhecer previamente a escolha do oponente.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, analisaremos um dos problemas clássicos da Teoria dos Jogos, conhecido como Dilema do Prisioneiro, a partir da situação apresentada por Ferreira e Santos (2017), no artigo **Delação Premiada e o Equilíbrio de Nash**, publicado na **Revista do Professor de Matemática**. Esse problema permite compreender como as decisões individuais podem influenciar os resultados coletivos, evidenciando a relação entre as estratégias adotadas pelos participantes e o conceito de equilíbrio de Nash.

Exemplo (Dilema do Prisioneiro): João e Pedro foram presos, e o juiz responsável pelo caso aprovou o uso do instrumento de investigação chamado de “delação premiada”. Os prisioneiros têm três opções: negar a participação na quadrilha; confessar sua

ISSN: 2358-8829

participação, mas não delatar o chefe; ou confessar sua participação e delatar o chefe da quadrilha. A oferta feita aos criminosos foi a seguinte:

- Se os dois confessarem, suas penas serão reduzidas pela metade;
- Se os dois negarem, cada um cumprirá a pena mínima: 5 anos para João e 10 anos para Pedro;
- Se os dois delatarem, suas penas serão reduzida a 1/3 da pena máxima;
- Se um negar e outro confessar, quem confessou terá pena máxima diminuída pela metade e quem negou cumprirá pena mínima mais 7 anos;
- Se um delatar e o outro negar, quem delatou será absorvido e quem negou cumprirá pena mínima mais 10 anos;
- Se um confessar e o outro delatar, quem delatou terá pena de 1/3 da pena máxima e quem confessou terá 2/3 da pena máxima.

Sabendo que a pena máxima de João é de 35 anos e de Pedro de 50 anos e que as defesas sejam independentes e que as decisões sejam tomadas simultaneamente.

Sejam u_j e u_p funções associadas às penas de João e Pedro, respectivamente. Consideramos a primeira variável sendo a decisão de João e a segunda de Pedro.

TABELA 1. Valores das funções que definem as penas dos prisioneiros.

João (pena máxima 35 anos)	**Pedro (pena máxima 50 anos)**
u_j(negar, negar) = 5	u_p(negar, negar) = 10
u_j(confessar, confessar) = 17,5	u_p(confessar, confessar) = 25
u_j(delatar, delatar) = 11,6	u_p(delatar, delatar) = 16,6
u_j(negar, confessar) = 12	u_p(negar, confessar) = 25
u_j(negar, delatar) = 15	u_p(negar, delatar) = 0
u_j(confessar, delatar) = 23,3	u_p(confessar, delatar) = 16,6
u_j(confessar, negar) = 17,5	u_p(confessar, negar) = 17
u_j(delatar, negar) = 0	u_p(delatar, negar) = 20
u_j(delatar, confessar) = 11,6	u_p(delatar, confessar) = 33,3

TABELA 2. Pares ordenados formados pelas penas de João e Pedro, respectivamente.

João \ Pedro	Negar	Confessar	Delatar
Negar	(5 ; 10)	(12 ; 25)	(15 ; 0)
Confessar	(17,5 ; 17)	(17,5 ; 25)	(23,3 ; 16,6)
Delatar	(0 ; 20)	(11,6 ; 33,3)	(11,6 ; 16,6)

Formalmente, o ponto de equilíbrio diz que uma estratégia conjunta (J^*, P^*) é um equilíbrio de Nash de satisfaz:

$$u_j(J^*, P^*) \leq u_j(e_i, P^*) \text{ e } u_p(J^*, P^*) \leq u_p(J^*, e_i)$$

em que e_i representa as possíveis escolhas de João e Pedro: **negar, confessar ou delatar.** Nesse caso, o equilíbrio de Nash se dá em **(delatar, delatar)**.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de problemas contextualizados no ensino de Matemática pode contribuir para aproximar os conteúdos teóricos de situações que despertam a curiosidade e o interesse dos estudantes. Nesse sentido, o estudo do Dilema dos Prisioneiros e a busca pelo Equilíbrio de Nash possibilitam explorar conceitos matemáticos a partir de uma situação-problema, favorecendo a participação e a reflexão dos alunos. Além disso, a análise das estratégias e dos resultados permite relacionar conceitos da Teoria dos Jogos ao estudo de funções, evidenciando como a Matemática pode ser utilizada para interpretar e analisar diferentes situações. A discussão de problemas contextualizados em sala de aula favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da capacidade de tomada de decisão, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa da matemática.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos, Equilíbrio De Nash, Jogos Não Cooperativos, Ensino De Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao PET Matemática e Estatística e ao FNDE pelo apoio financeiro.

ISSN: 2358-8829

REFERÊNCIAS

ARTINI, B. A.; GARBUGIO, G.; BORTOLOSSI, H. J.; SANTOS, P. A.; BARRETO, L. S. **Uma introdução à Teoria dos Jogos**. In: II Bienal da SBM, 2004, Salvador. 2004.

FERREIRA, D. B.; SANTOS, J. P. **Delação Premiada e o Equilíbrio de Nash**. Revista do Professor de Matemática, v. 93, p. 32, 2017.