ISSN: 2358-8829

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA UTILIZANDO ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Mengla Costa da Silva [1]
Josefa Itailma da Rocha [2]

INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) trata o estudo das áreas de figuras geométricas na unidade temática de Geometria e propõe que ele não se limite à memorização de fórmulas, mas envolva processos de investigação, comparação, decomposição de figuras e resolução de problemas contextualizados (BRASIL, 2018). Na prática escolar, porém, o conceito de área costuma aparecer tardiamente e de modo instrumental, como um conteúdo a ser aplicado, e raramente como um recurso para compreender outros resultados.

Wagner (1992) observa que as áreas costumam ficar para o fim do curso de Geometria e defende que "o conceito de área deve ser introduzido o mais cedo possível" (WAGNER, 1992, p. 19), utilizando-o sempre que o professor julgar conveniente. Segundo o autor, diversas demonstrações da Geometria e da Trigonometria tornam-se mais simples e elegantes quando se recorre a esse conceito. Tomando esse artigo como ponto de partida, o objetivo deste trabalho é mostrar como o conceito de área de figuras planas permite demonstrar resultados da Geometria e da Trigonometria ligados às habilidades EF09MA14 e EM13MAT308 da BNCC, de modo que possam ser empregados em sala de aula.

Foram estudados o problema da soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados, os Teoremas da Bissetriz e de Tales, as fórmulas do seno do arco duplo, do arco metade, da soma e da diferença de dois arcos e a Lei dos Senos. Em todos os casos, a ideia central é calcular a área de uma mesma figura de dois modos diferentes e igualar os resultados, o que dispensa linhas auxiliares artificiais e passagens ao limite.

METODOLOGIA

O trabalho é de natureza bibliográfica e teórica. As demonstrações do artigo "Usando áreas" (WAGNER, 1992), uma delas inspirada em Lima (1991), foram estudadas, reescritas com as hipóteses explicitadas e ilustradas com novas figuras, elaboradas pelas autoras e

[1] Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, costamengla@gmail.com;
[2] Professora orientadora da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, itailma@mat.ufcg.edu.br.

ISSN: 2358-8829

adaptadas de Wagner (1992), que acompanham cada demonstração. Por se tratar de pesquisa exclusivamente teórica, sem coleta de dados com participantes e sem uso de imagens de pessoas, não houve necessidade de submissão a comitê de ética.

Dois fatos sustentam todas as demonstrações: (i) triângulos de mesma altura têm áreas proporcionais às suas bases; (ii) a área de um triângulo é igual à metade do produto de dois de seus lados pelo seno do ângulo formado por eles, isto é, $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen} A$. Adota-se a notação $S(XYZ)$ para a área do triângulo XYZ. As letras gregas α e β designam ângulos agudos, cujo seno, cosseno e tangente são definidos no triângulo retângulo.

REFERENCIAL TEÓRICO

A BNCC organiza o ensino de Matemática em unidades temáticas, entre elas a Geometria, e orienta que o estudo de áreas vá além da aplicação de fórmulas, envolvendo investigação, comparação e decomposição de figuras (BRASIL, 2018). Duas habilidades da Base dialogam diretamente com este trabalho: a EF09MA14, do Ensino Fundamental, que trata de problemas envolvendo proporcionalidade entre retas paralelas cortadas por secantes, o que remete ao Teorema de Tales; e a EM13MAT308, do Ensino Médio, que trata da aplicação de relações métricas, entre elas a Lei dos Senos, e de noções de congruência e semelhança na resolução de problemas com triângulos.

Wagner (1992) sustenta que o conceito de área deve ser apresentado cedo e utilizado como ferramenta de demonstração. Ao comparar duas soluções de um mesmo problema, ele observa que a prova por congruência de triângulos exige linhas auxiliares que os alunos podem considerar um pouco artificiais, enquanto, na prova por áreas, o resultado aparece de forma bem mais natural. O autor também aponta que, na escola, as funções trigonométricas são introduzidas para ângulos agudos, como razões entre lados de um triângulo retângulo, e que, com figuras particulares, só se consegue calcular seus valores para alguns ângulos, como 30°, 45°, 60° e 18°. Para enriquecer o estudo, propõe antecipar fórmulas que mais tarde serão deduzidas em um contexto mais geral.

Lima (1991) apresenta, em *Medida e forma em Geometria*, uma demonstração do Teorema de Tales por áreas, que inspirou a de Wagner (1992) e não depende de os segmentos serem ou não comensuráveis.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Problema inicial: a soma das distâncias a um ponto interior

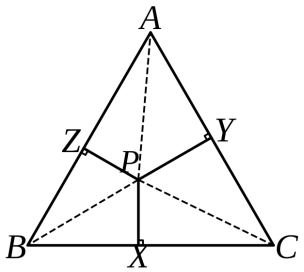
Em um triângulo equilátero, a soma das distâncias de um ponto interior aos três lados é constante e igual à altura. Sejam ℓ o lado e h a altura do triângulo ABC, P um ponto interior e

ISSN: 2358-8829

PX, PY e PZ as distâncias de P aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Ligando P aos vértices, o triângulo ABC fica decomposto em PBC, PCA e PAB, de modo que $S(PBC) + S(PCA) + S(PAB) = S(ABC)$, ou seja (Figura 1):

$$\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot PX + \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot PY + \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot PZ = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot h$$

Figura 1 – Triângulo equilátero ABC e ponto interior P



Fonte: Elaboração própria, adaptada de Wagner (1992).

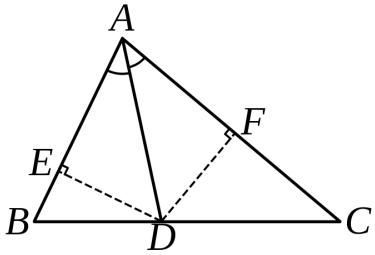
Dividindo por $\frac{1}{2}\ell$, obtém-se $PX + PY + PZ = h$. Esse é o problema que abre o artigo de Wagner (1992). Pela via da congruência, a prova exige uma paralela a BC por P, duas alturas e uma perpendicular auxiliar; pela via das áreas, ela é imediata. A comparação evidencia o ganho didático do método: a decomposição da figura, que a BNCC propõe como prática de investigação, é a própria demonstração.

Teorema da Bissetriz

Se AD é a bissetriz interna do ângulo Â do triângulo ABC, com D em BC (Figura 2), então $DB/DC = AB/AC$. Os triângulos ABD e ACD têm a mesma altura relativa ao vértice A; logo, pelo fato (i), $S(ABD)/S(ACD) = DB/DC$. Por outro lado, o ponto D, por pertencer à bissetriz, equidista dos lados do ângulo: se E e F são os pés das perpendiculares de D a AB e AC, então $DE = DF$. Como $S(ABD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE$ e $S(ACD) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DF$, segue que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{S(ABD)}{S(ACD)} = \frac{AB \cdot DE}{AC \cdot DF} = \frac{AB}{AC}$$

Figura 2 – Bissetriz AD do ângulo Â



Fonte: Elaboração própria, adaptada de Wagner (1992).

A prova usual requer uma paralela auxiliar e o Teorema de Tales; pela via das áreas, basta a propriedade de equidistância, o que dispensa o Teorema de Tales nessa demonstração.

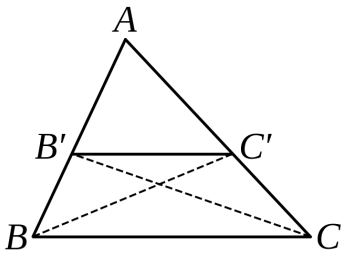
ISSN: 2358-8829

Teorema de Tales

Sejam B' e C' pontos dos lados AB e AC do triângulo ABC (Figura 3). Se $B'C'$ é paralelo a BC, então $AB'/AB = AC'/AC$. Os triângulos $B'C'B$ e $B'C'C$ têm a mesma base $B'C'$ e a mesma altura, a distância entre as paralelas, e portanto a mesma área. Somando o triângulo $AB'C'$ a cada um deles, obtém-se $S(ABC') = S(ACB')$. Aplicando o fato (i) com alturas traçadas por C' e por B', respectivamente, vem

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{S(AB'C')}{S(ABC')} = \frac{S(AC'B')}{S(ACB')} = \frac{AC'}{AC}$$

Figura 3 – Triângulo ABC com B′C′ paralelo a BC



Fonte: Elaboração própria, adaptada de Wagner (1992).

O teorema e sua recíproca são fundamentais, pois deles decorrem os resultados sobre semelhança de triângulos e as propriedades da homotetia (WAGNER, 1992). A demonstração por feixe de paralelas só se completa, no caso de segmentos incomensuráveis, com uma passagem ao limite; a demonstração por áreas é uma só e vale para qualquer razão, em diálogo com a habilidade EF09MA14.

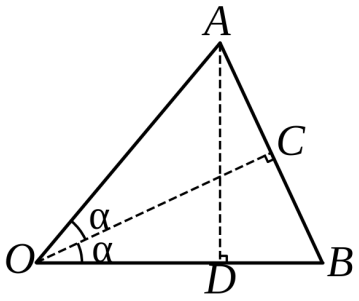
Seno do arco duplo e do arco metade

Seja $0° < \alpha < 45°$. Tomam-se, conforme a Figura 4, $OA = OB = 1$, o ângulo $A\hat{O}B$ de medida 2α, OC perpendicular a AB e AD perpendicular a OB. No triângulo isósceles OAB, OC é altura e bissetriz, o que dá $OC = \cos\alpha$ e $AB = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha$; no triângulo retângulo OAD, $AD = \operatorname{sen} 2\alpha$. O dobro da área de OAB pode ser calculado tomando-se como base OB ou AB, o que resulta em $OB \cdot AD = AB \cdot OC$, isto é,

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

ISSN: 2358-8829

Figura 4 – Triângulo isósceles OAB com AÔB = 2α



Fonte: Elaboração própria, adaptada de Wagner (1992).

Para o cosseno, o raciocínio é feito por segmentos, sem recorrer a áreas: $OD = \cos 2\alpha$ e, como o ângulo em B mede $90° - \alpha$, $DB = AB \cdot \cos(90° - \alpha) = 2 \cdot \text{sen}^2\,\alpha$. Impondo $OD + DB = OB = 1$, obtém-se

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2\,\alpha$$

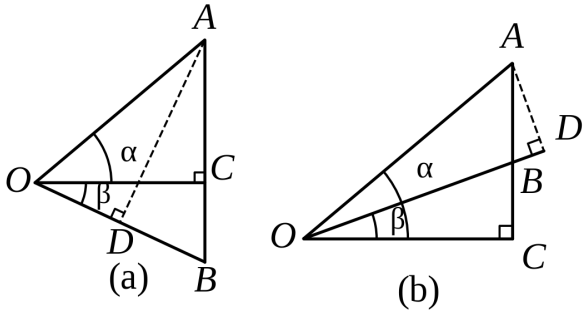
Substituindo 2α por α, com $0° < \alpha < 90°$, resulta $\text{sen}^2(\alpha/2) = 1 - \cos \alpha/2$.

Seno da soma e da diferença

Sejam α, β, $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ ângulos agudos. Toma-se, conforme a Figura 5, $OC = 1$, AB perpendicular a OC, AD perpendicular a OB, $A\hat{O}C = \alpha$ e $B\hat{O}C = \beta$. Então $OA = 1/\cos\alpha$ e $OB = 1/\cos\beta$. No caso (a), com A e B em lados opostos de C, tem-se $AB = \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta$ e $AD = OA \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)$. No caso (b), com A e B do mesmo lado de C e $\alpha > \beta$, tem-se $AB = \text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta$ e $AD = OA \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)$. Em ambos, o dobro da área de OAB é $OB \cdot AD = AB \cdot OC$. No caso (a):

$$\frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta$$

Figura 5 – Construções para (a) sen(α + β) e (b) sen(α − β)



Fonte: Elaboração própria, adaptada de Wagner (1992).

Multiplicando por $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, obtém-se $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$. A demonstração do caso (b) é inteiramente análoga e fornece $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$. Assim, as fórmulas aparecem apenas com o triângulo retângulo, antes de qualquer introdução do ciclo trigonométrico, como propõe Wagner (1992).

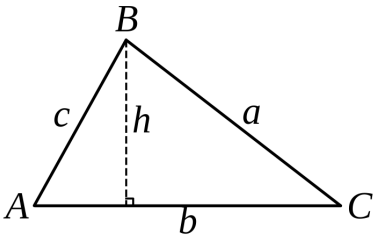
ISSN: 2358-8829

Lei dos Senos

No triângulo ABC, de lados a, b e c, seja h a altura relativa ao lado b (Figura 6). Como $h = c \cdot \operatorname{sen} A$, a área é $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen} A$. Do mesmo modo,

$$S = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \operatorname{sen} C$$

Figura 6 – Triângulo ABC e altura h relativa ao lado b



Fonte: Elaboração própria, adaptada de Wagner (1992).

Multiplicando a primeira igualdade por a, resulta $a/\operatorname{sen} A = abc/2S$. O mesmo procedimento aplicado a b e a c conduz a

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

A construção supõe o ângulo A agudo; se A é obtuso, usa-se $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(180° - A)$. Nessa demonstração, a lei decorre de uma única fórmula de área, o que favorece a compreensão do significado da lei e o diálogo com a habilidade EM13MAT308.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo mostrou que o conceito de área permite demonstrar, de modo natural e visual, resultados centrais da Geometria e da Trigonometria: o Teorema de Tales sem passagem ao limite, o Teorema da Bissetriz sem paralela auxiliar e as fórmulas do seno do arco duplo, do arco metade, da soma e da diferença apenas com o triângulo retângulo, ainda que restritas a ângulos agudos. A Lei dos Senos, por sua vez, decorre diretamente da fórmula da área em função do seno. Levadas à sala de aula, essas demonstrações dão significado às fórmulas, em consonância com a orientação da BNCC de que o estudo das áreas envolva investigação, comparação e decomposição de figuras.

Por se tratar de um trabalho teórico, não se avaliou o efeito dessas demonstrações sobre a aprendizagem. Sugere-se a elaboração e a aplicação de sequências didáticas com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Palavras-chave: Área de figuras planas; Geometria; Trigonometria; Demonstrações.

ISSN: 2358-8829

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

LIMA, E. L. **Medida e forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

WAGNER, E. Usando áreas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 21, p. 19-25, 1992.