PARTICULARIDADE DA CURVA CATENÁRIA: Aplicação no âmbito escolar.

Ellem Kamilly Silva Aguiar[1]

RESUMO

A Catenária é uma curva matemática que descreve a forma assumida por um cabo suspenso uniformemente entre dois pontos fixos, sobre a influência da gravidade. Ou seja, existe influência da física. Foi uma curva bastante discutida até que chegasse em uma comprovação de diferenciação da parábola, realizado por grandes estudiosos da época marcado por períodos das curvas. Nesse artigo o objetivo foi trabalhar um projeto, para que os professores busquem elaborar em suas aulas, proporcionando uma atividade que trabalhe com a criatividade dos alunos realizando um momento dinâmico e coletivo em sala de aula. Pois é um tema pouco visto e que também esse arco catenária é muito comum no nosso cotidiano e poucos sabem de sua existência. A pauta será acerca do conteúdo catenária, para ser desenvolvida com turmas do 9 ° ano e Ensino médio. Com isso, o assunto é proveitoso para expor e trabalhar no âmbito educacional, pela vasta presença em nosso dia a dia que é bem confundido com a parábola.

Palavras-chave: Catenária, Curva, História, Cadeia, Meio escolar

ABSTRACT

The Catenary is a mathematical curve that describes the shape assumed by a cable suspended uniformly between two fixed points, under the influence of gravity. In other words, there is an influence from physics. It was a curve that was widely discussed until it was possible to prove the differentiation of the parabola, carried out by great scholars of the time marked by periods of the curves. In this article, the objective was to work on a project, for teachers to seek to develop in their classes, providing an activity that works with students' creativity, creating a dynamic and collective moment in the classroom. Because it is a topic that is rarely seen and this catenary arch is also very common in our daily lives and few people know about its existence. The agenda will be about the catenary content, to be developed with 9th grade and high school classes. Therefore, the subject is useful to discuss and work on in the educational field, due to its vast presence in our daily lives, which is often confused with the parable.

Keywords: Catenary, curve, chain, chain, school medium

INTRODUÇÃO

[1] Graduanda em Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, ellem.aguiar@aluno.uepb.edu.br;

Como não se tem discutido e trabalhado a acerca da curva catenária nos ensinos finais, a presente pesquisa tem o foco principal de propor um projeto no âmbito educacional. Visando abordar o conteúdo de catenária e a presença da curva no cotidiano, as turmas que serão responsáveis pela construção e apresentação de maquetes/trabalhos, serão as do 9° ano e do ensino médio, com um professor de física para o auxílio da conexão com a disciplina.

O presente artigo apresentará o enredo histórico e trajeto de estudo até sua validação. Também, suas propriedades que esclarece a diferença da parábola que é comum ser confundida. Além disso, aplicações do cotidiano contribuindo na visibilidade do aluno e promovendo ideias criativas para a produção do trabalho. Ainda, a função exclusiva da catenária que informa a diferença da função quadrática, e pode-se manusear as funções no aplicativo Geogebra para verificar as suas características. E a utilização do programa beneficia o estudante no decorrer do projeto. Ou seja, a ferramenta suporte será o Geogebra. E ainda nessa seção apresenta um provável resultado, como exemplo para o esperado trabalho.

Será explorado através das produções abordadas, fatores enriquecedores para os estudantes envolvidos. Deve se levar em conta que a escola que atribui um projeto como esse na vivência dos estudantes, adiciona fatores impulsionadores como: incentivar o trabalho em equipe que "a aprendizagem para o trabalho em equipe começa na pré-escola com o aprendizado do trabalho em cooperação, com adequada divisão de tarefas e responsabilidades, com o aprender a respeitar o outro. Deve prosseguir nos vários anos acadêmicos até a Universidade." (WITTER,2011, p.01) e também mostrar ao aluno que há interdisciplinaridade entre matérias, sendo elas a matemática, física e arte. Além disso, a experiência da apresentação ao público que é crucial para a formação do estudante, em harmonia com Campello (2000, p.56-51) enfatiza que "a apresentação oral do trabalho no encontro tem a vantagem de possibilitar que críticas e sugestões sejam feitas na hora, de forma a permitir uma retroalimentação instantânea, podendo envolver vários pontos de vista". Por fim, o intuito é obter resultados satisfatórios e vastas trocas de conhecimentos.

METODOLOGIA

A metodologia presente neste trabalho tem natureza qualitativa, haja vista que foi utilizado como base um material de robótica presente no Laboratório de Matemática (LM)

em Queimadas – PB, em um dos momentos que a primeira autora deste trabalho participava do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), para composição do trabalho.

Como instrumento de pesquisa, foi apresentado ao professor na escola em que estava presente o LM através de uma Pibidiana, a busca de utilizar a curva catenária por meio da robótica questionando se é possível trabalhar parábola com o arco. O referido professor comentou que não seria uma curva quadrática e sim, a catenária. A partir disto surgiu a curiosidade em se aprofundar nos estudos sobre a catenária, já que nenhum participante do PIBID tinha o conhecimento desta temática.

Apesar de pouco tempo em se aprofundar nesta temática por meio do PIBID, através da disciplina História da Matemática na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) surge este referido artigo. Sendo a sua construção realizada nos seguintes passos, primeiro foi feita uma revisão bibliográfica da temática, tendo como meios de fundamentação teórica as revistas acadêmicas e científicas disponíveis de forma online. Segundo, foi realizado uma proposta de atividade para ser realizada com alunos do 9° ano do ensino fundamental e ensino médio, onde foi testada no aplicativo Geogebra e por meio de matérias didáticos, e por fim foi descrito a proposta de passos que o professor pode seguir para abordar em sala de aula este projeto.

A CATENÁRIA E SUA HISTÓRIA

Quando usamos a palavra catenária, poucos sabem o seu significado. Pois é uma temática não muito trabalhado, é comum ser comparada e até trocada com uma parábola, pelo simples fato de sua ausência de visibilidade, até mesmo por Galileu Galilei antes do problema da corrente suspensa ter sido resolvido. Nesse sentido, iniciaremos com sua definição e toda sua propriedade, para que fique evidente sua singularidade.

Contudo, é essencial abordar sua definição e enredo histórico dos seus estudos. Leibniz, batizou essa curva chamada de catenária, que de acordo com Simmons (1987) tem origem latina que é conhecida como cadeia. Segundo Eves (2004, p. 399), a definição de catenária é uma curva encerrada por uma corrente completamente ajustável e inextensível, ou seja, que não se pode encompridar de densidade linear uniforme, suspensa em ambas as extremidades pelo impacto do seu próprio peso. Segundo Mendes (2017), o estudo das curvas, hoje chamadas de linhas catenárias, começou com o

matemático Galileu Galilei (1564 – 1642). No entanto, Galileu e Leonardo da Vinci pensaram que tal curva seria uma parábola. Porém não era bem assim que pensavam. Galileu ainda continua errando quando publicado em 1638 no *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze* a observação da corrente suspensa e sustentando que era uma parábola comparando com um voo de um projétil.

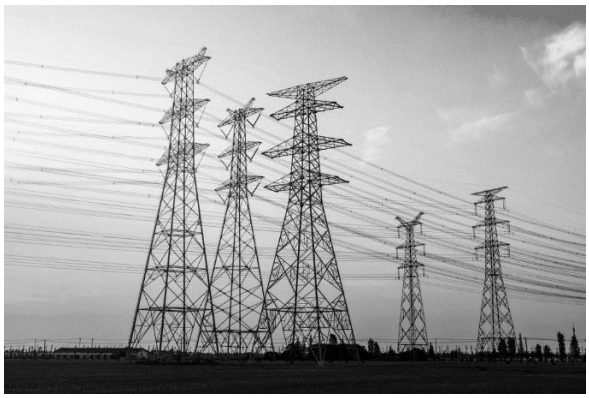
A catenária é realmente parecida com a parábola, porém, é dada pela função hiperbólica, enquanto a parábola é uma função quadrática, se for observar seu formato é parecido e é por isso o desafio dessa curva. Somente anos à frente, Jakob Bernoulli resolveu o problema proposto sobre a catenária, que foi lançado um desafio para a comunidade de matemática em 1690, diferenciando a catenária da parábola, que desde a época dos gregos vem tentando resolver. Os matemáticos se desafiavam entre si, esse contexto histórico ficou marcado por período das curvas. Época de diversas discussões, que foram realizadas por Leibniz, Newton, Bernoulli e Christian Huygens grandes estudiosos e influenciadores da história da matemática sobre esse problema. Só em 1757 com o Vincenzo Riccati que a curva assume uma correspondência.

Historicamente no século XVII segundo o Instituto Brasileiro de geografia e estatística (2024) "A descoberta do ouro, no final do século XVII, nas regiões das Minas Gerais foi importante para a expansão territorial e para uma nova organização administrativa da colônia". Como visto, foi marcado pela a descoberta do ouro, a aproximação da Coroa portuguesa à espanhola, o controle do litoral norte, a tentativa de ocupação holandesa, a batalha dos Guararapes e a corrida pelo ouro. Tratando geograficamente como dito por Dias (2009) "[...] realça-se a utilidade do Mediterrâneo como via de comunicação, pois anualmente é cruzado por inúmeros navios pertencentes a diferentes marinhas mercantes, atestando da sua utilidade do ponto de vista mercantil[...]", o Reino unido, Suíça e os Países baixos são as localizações mais afastada do mar mediterrâneo, que nesse caso é onde Isaac Newton, Jakob Bernoulli e Christian Huygens encontra-se. Os outros citados no decorrer desse trabalho que mais se aproximam do mar mediterrâneo é a Itália e Alemanha, observando a grande influência de interações culturais, facilitando o compartilhamento do conhecimento e a troca de ideias, impulsionando assim o avanço dos estudos da catenária.

APLICAÇÕES DA CATENÁRIA

Um grande exemplo do nosso cotidiano envolvendo a catenária são as linhas de transmissão de energia, os cabos suspensos, sendo uma aplicação importante de suas propriedades. Funcionam como ganchos de suporte que não podem estar na mesma linha vertical, havendo dependência da topografia do terreno.

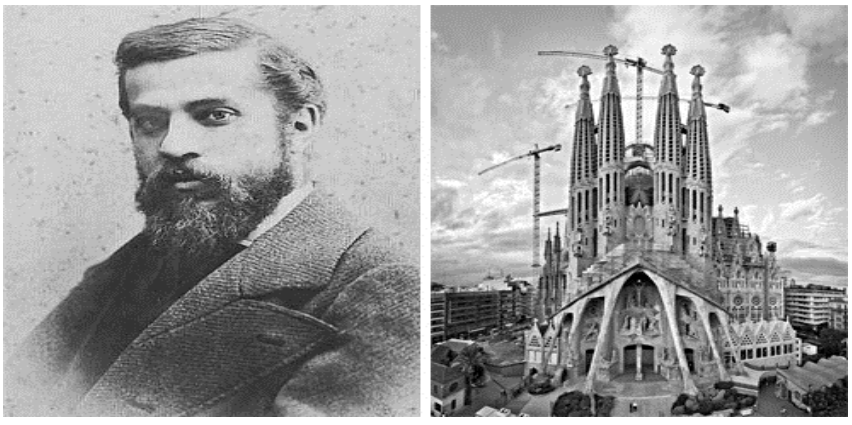
Figura 1: Exemplo da curva catenária



Fonte: Imagem do google

Como visto acima, o exemplo da curva catenária, é facilmente e visivelmente comparada com a parábola. Outra representação temos em estruturas de grandes engenharias e destaques de arquitetos famigerados que produziram construções, o Antoni Gaudi e Cornet (1852-1926) e César Martinell e Brunet (1888-1973) que também não menos importante é vital apresentar. A seguir a construção de Antoni Gaudi e Cornet:

Figura 2: Imagem da construção de Antoni Gaudi e Cornet.



Fonte: Imagem do google

FUNÇÃO DA CATENÁRIA E UM POSSIVEL RESULTADO

Partindo do pressuposto que a catenária é confundida com a parábola, se realizamos o estudo da curva hiperbólica podemos observar que elas são distintas. Nesse

caso, sabe-se que a parábola é uma equação do 2° grau, que encontra suas raízes através da formula de Bhaskara. Já a catenária segundo o trabalho de Maor (2004), fala que a curva catenária é de equação $\gamma = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$, onde a é uma constante e necessita dos princípios físicos que há na corrente. E de acordo com Sousa, Alves, Souza (2022, p.09) afirmam que "Vista como função do cosseno hiperbólico, a catenária pode ser definida por uma curva gerada a partir de um cabo flexível, de densidade constante, pendurada entre dois extremos" e foi criado por Vincenzo Riccati em 1757, e provando o equívoco que Galileu teve bem no início.

Contudo, se utilizarmos o software Geogebra para a implementação desse projeto é importante para o desempenho e clareza do aluno, pode-se usar no smartphone ou o professor realizar o espelhamento em uma TV para os alunos, é viável a sua utilização. Em concordância com Sousa, Alves, Souza (2022, p.18) comprova que "[..] o uso da tecnologia como o Geogebra pode propiciar uma discussão com aporte tanto visual como algébrico, promovendo um ambiente de aprendizagem[...]". Com isso, uns exemplos com a equação da catenária foram feitos:

1. Utilizando o Geogebra para auxilio, em equipe, usem da criatividade e busquem materiais para a realização de trabalhos com a curva catenária;

a) $\gamma = \frac{e^{15x}+e^{-15x}}{30}$

b) $\gamma = \frac{e^{25x}+e^{-25x}}{50}$

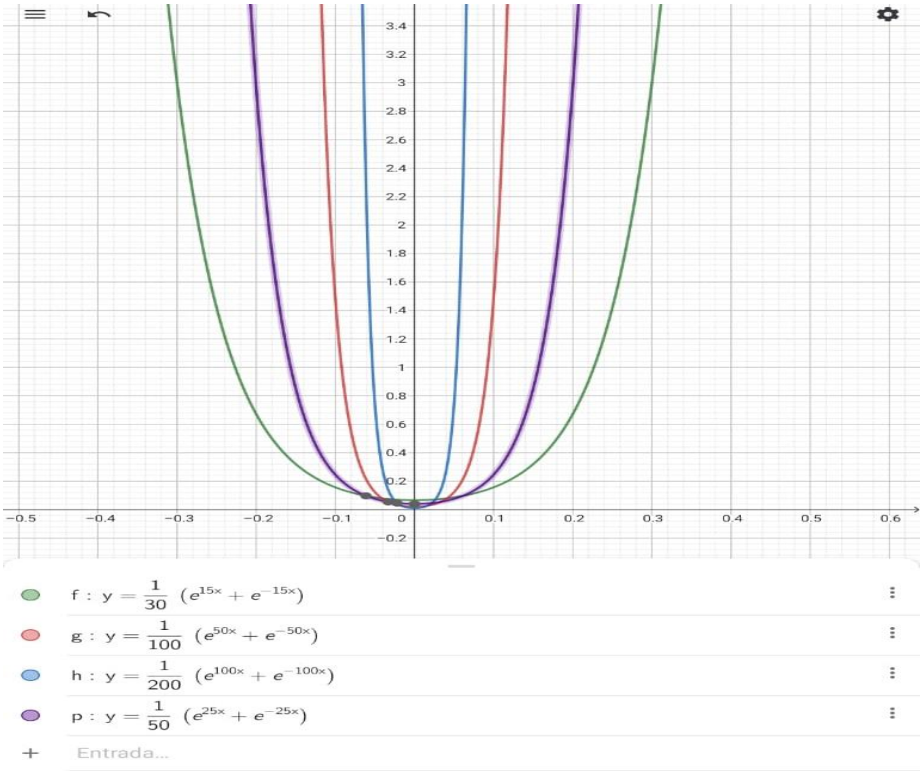
c) $\gamma = \frac{e^{50x}+e^{-50x}}{100}$

d) $\gamma = \frac{e^{100x}+e^{-100x}}{200}$

Solução:

Ao inserir no aplicativo o resultado das seguintes curvas foram:

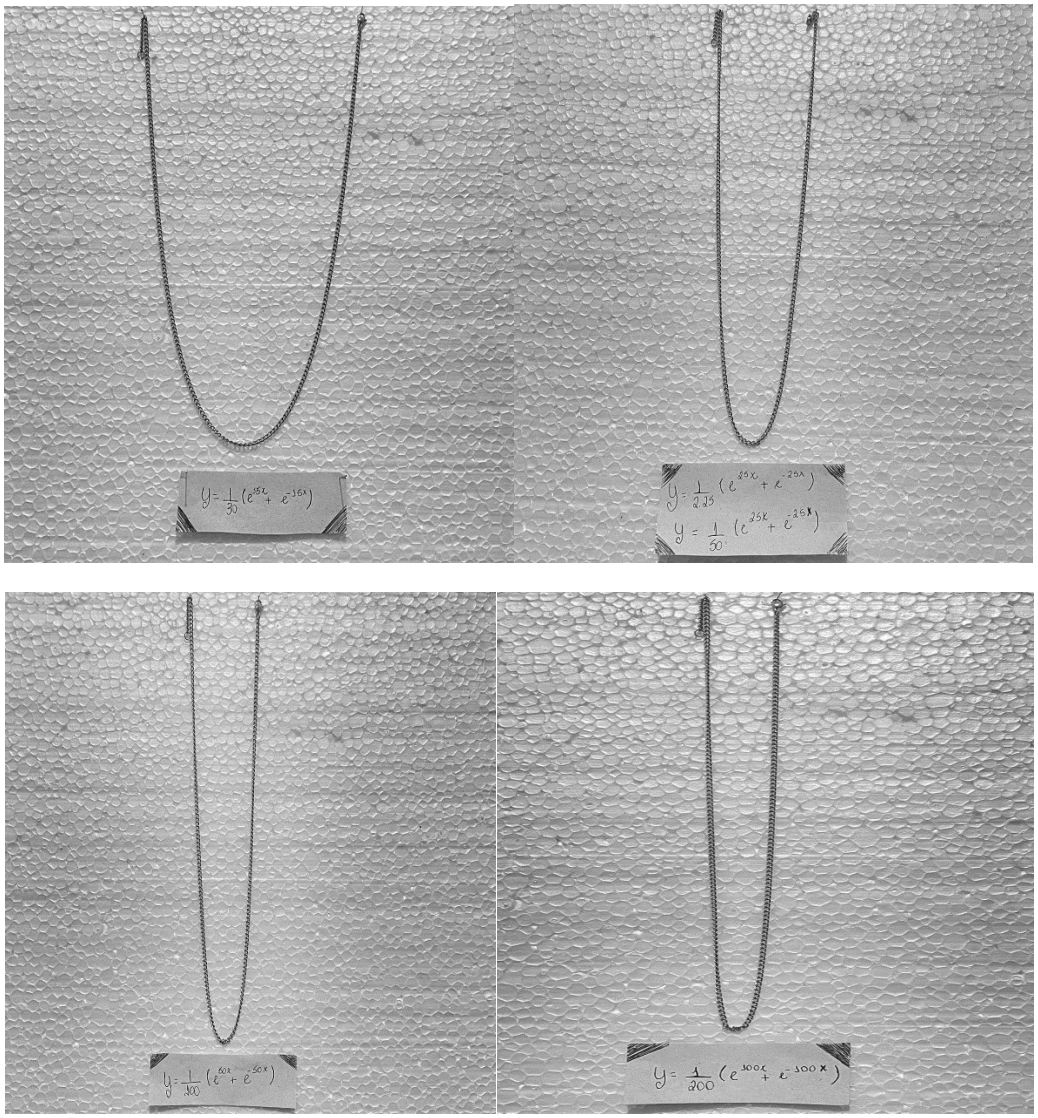
Figura 3: Construção da catenária no Geogebra.



Fonte: Autoria própria

Nessa imagem é ilustrado funções de catenária, que colocado no aplicativo saiu como resultado. Foram atribuídos a constante a valores 15 resultante da curva verde exposta na figura, 50 a vermelha, 100 a cor azul e 25 a cor roxa. Com isso, é visto como o aplicativo auxilia na observação dos resultados e ainda no aprendizado. No entanto, além do aplicativo Geogebra, pode-se construir possíveis resultados das equações dadas, utilizando materiais concretos (figura 4):

Figura 4: Produção dos exemplos catenária com matérias criativos.



Fonte: Autoria Própria.

Diante as figuras, ainda com os exemplos da aplicação do Geogebra quando construído surgiram visualizações sobre a produção. Uma delas foi que cada vez que a constante a aumenta os valores mais a curva se fecha, e logicamente quando o valor diminui o arco se abre. Além disso, foi utilizado um cordão de aço, pedaços de papéis indicando as funções, tesoura, alfinete e uma folha de isopor. É vital que o aluno use de sua criatividade e como já foi dito nesse trabalho, surgirá debates e posicionamentos diferente.

Perante a toda essa abordagem apresentada, fica explicito tal diferença entre as particularidades da parábola, e da curva catenária. Com fundamento nisso, indicações será apresentada seguir para a aplicação do trabalho, relacionada ao assunto, para ser trabalhado no âmbito educacional.

ABORDANDO A CATENÁRIA NA ESCOLA

Como já objetivado nesse artigo, há importância da aplicação da curva em sala de aula, e usar exemplos do cotidiano para a construção do trabalho é excelente, com isso segue as etapas da prática de catenária;

Etapa 1: Apresentação de exemplos de catenárias.

O professor irá apresentar imagens e exemplos de catenárias e a interdisciplinaridade com a física e a artes, e a abordagem do aplicativo Geogebra com funções da catenária com qualquer valor dada a constante a. E vale ressaltar que o aluno antes dos exemplos mostrados, já tenha uma pesquisa escrita da definição do que é catenária, como atividade extra para possíveis debates.

Etapa 2: Construção das maquetes 1/2.

Dividir a turma em grupos que eles mais tenham afinidade, ou sorteado, como o professor achar melhor. E unidos debaterem o que vão produzirem para o projeto e selecionar o papel de cada como acharem melhor.

Etapa 3: Construção das maquetes 2/2.

Com as equipes já formadas, iniciarem a construção do que já deixaram pensado na parte 1/2 da construção da maquete *(utilizar a criatividade em equipe, e se preciso usar o auxílio do software Geogebra).* Vale ressaltar que, os grupos devem ser orientados a criar maquetes de algo que inclua exemplo de catenária no trabalho.

Etapa 4: Apresentação das maquetes/ou trabalho.

Cada grupo irá apresentar sua maquete e explicar a escolha do projeto, a construção da catenária e os materiais utilizados. Após as apresentações, promover uma discussão em que os alunos possam compartilhar suas experiências, dificuldades encontradas e aprendizados durante a atividade.

CONCLUSÃO

Podemos observar que é possível obter por meio de uma equação da catenária, uma curva qualquer sob a influência da gravidade. Com ela pode-se ter acesso a um modelo analítico e numérico que descreve o comportamento das tensões aplicadas aos pontos pertencentes a cabos suspensos. Isso é algo primordial e de grande utilidade na

elaboração de projetos de engenharia e arquitetura, em especial nos cabos de energia elétrica e nas demais estruturas suspensas. A catenária tem propriedades únicas que a diferencia da parábola, propriedades estas que podem ser exploradas no âmbito escolar. Ao exibir para os estudantes as diferenças entre essas duas curvas matemáticas, é possível fazer a demonstração de como ela tem aplicabilidade na vida real, proporcionando assim um maior aumento nível de interesse e entendimento dos conceitos matemáticos que estão sendo estudados.

Diante de tudo isso, fica evidente como a catenária pode oferecer oportunidades de aplicação no meio escolar, seja por meio do seu estudo histórico ou pelas suas propriedades, de tal maneira que proporcione o aprendizado da matemática ser mais dinâmico para os estudantes. Além disso, é esperado que com a possível utilização deste projeto os alunos consigam explorar essa curva e observar o quanto a matemática está presente em nosso dia a dia, e há interdisciplinaridade com outras disciplinas. Também, aproveite o objetivo do projeto para ser uma atividade leve e divertida, mas com diversas novas aprendizagens. Por fim, ao ter entendimento sobre a importância e singularidade da catenária, torna-se possível ter noção da sua relevância no desenvolvimento de estruturas e tecnologias e habituar no meio ambiente escolar seja proveitoso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMPELLO, Bernadete Santos. Encontros científicos. CAMPELLO, Bernadete Santos;

CENDÓN, Beatriz Valadares; KREMER, Jeannette Marguerite (Org). **Fontes de informação para pesquisadores e profissionais**. Belo Horizonte: Ed. UFMG,2000.

DIAS, Carlos Manuel Mendes (2009). **"Outrora … Europa Banhou-se no Mediterrâneo"** in Revista de Geopolítica, o coração da eurásia contra o resto do mundo, n.º 3, Aveiro: Centro Português de Geopolítica, 173-219.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

MAOR, E. (2004). **E: a história de um número**. São Paulo: Record.

MENDES, M. F. **A curva catenária como aplicação da função exponencial**. 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com geometria analítica.** Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1987. v. 1

TEÓFILO DE SOUSA, R.; RÉGIS VIEIRA ALVES, F.; JOSÉ ARAÚJO SOUZA, M. Aspectos da parábola e da catenária: um estudo à luz da Geometria dinâmica. **Revemat revista eletrônica de educação matemática**, v. 17, p. 1–22, 2022.

WITTER, Geraldina Porto. **Trabalho em equipe**. Campinas. PUC-Campinas,2011.