ISSN: 2358-8829

DA TRACTRIZ À PSEUDOESFERA: UM ESTUDO DE CURVAS E SUPERFÍCIES EM GEOMETRIA DIFERENCIAL

Leidiane Alves Costa [1]
Danilo Ferreira da Silva [2]

INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial investiga as propriedades de curvas e superfícies no plano e no espaço utilizando ferramentas do cálculo diferencial e integral, permitindo a interpretação geométrica de fenômenos em diversos contextos. Nesse campo, destaca-se a tractriz, uma curva plana que descreve a trajetória de um objeto arrastado por uma corda de comprimento constante, enquanto sua outra extremidade se desloca em linha reta.

Conforme apontado por Vieira e Siqueira (2024), estudos sobre a tractriz envolveram importantes intelectuais do século XVII, tais como Claude Perrault, Gottfried Wilhelm Leibniz e Christiaan Huygens, que contribuíram para a investigação das propriedades dessa curva.

Diante disso, o presente trabalho tem como objetivo discutir os fundamentos geométricos da tractriz e da pseudoesfera, a superfície obtida pela rotação da tractriz em torno de sua assíntota, determinando a curvatura e a evoluta da tractriz e a curvatura gaussiana da pseudoesfera, buscando aproximar o formalismo algébrico das representações geométricas a fim de favorecer uma melhor compreensão desses conceitos.

Com essa finalidade, realizou-se uma pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa e caráter teórico, fundamentada em literatura matemática clássica e contemporânea, com base em Vieira e Siqueira (2024) e nos conceitos de Geometria Diferencial apresentados por Tenenblat (2008).

Como principais resultados, o estudo apresenta propriedades relevantes da tractriz e uma ligação direta com a catenária, além de sua relação com a construção da

[1] Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Regional do Cariri – URCA. Trabalho desenvolvido como bolsista de Iniciação Científica (FUNCAP/URCA), leidiane.alves@urca.br;
[2] Professor orientador: Doutor em Matemática, Universidade Regional do Carirí – URCA, daniloferreiraa@urca.br.

pseudoesfera, superfície cuja curvatura gaussiana é constante e igual a -1. Essa propriedade relaciona-se aos estudos de Eugenio Beltrami sobre Geometrias Não Euclidianas. Por fim, conclui-se que essa abordagem contribui para a formação do professor de Matemática ao facilitar a visualização de conceitos abstratos.

METODOLOGIA

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa de natureza teórica, desenvolvida por meio de revisão bibliográfica em referências da História da Matemática e da Geometria Diferencial. A análise foi conduzida de forma qualitativa, com foco na compreensão dos fundamentos históricos e matemáticos da curva tractriz.

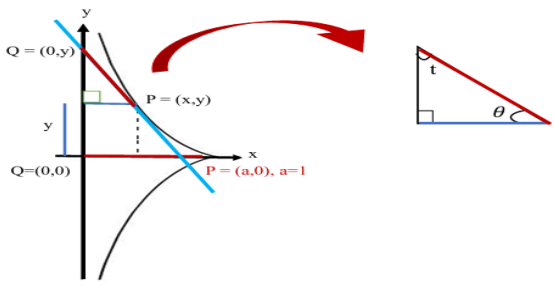
O procedimento metodológico compreendeu três etapas principais: a modelagem da curva tractriz e a sua parametrização analítica por meio de uma equação diferencial ordinária; a extensão tridimensional do modelo para a obtenção da superfície pseudoesférica, avaliada localmente através do cálculo das formas fundamentais e sua curvatura gaussiana; e a determinação da evoluta da tractriz caracterizando a catenária.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considerando uma curva plana cuja reta tangente delimitada pelo ponto de tangência e o eixo y possui comprimento constante, conforme ilustrado na Figura 1, a construção geométrica, por meio de relações trigonométricas, conduz à equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Figura 1 - Modelagem da Tractriz



Fonte: Elaborada pela autora no Microsoft PowerPoint (2026)

ISSN: 2358-8829

Por separação de variáveis e sob a condição $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, obtém-se a parametrização da tractriz, dada por:

$$\alpha(t) = \left(sen(t), cos(t) + ln\left|tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right), t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Determina-se $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ e pela fórmula

$$k(t) = \frac{\left(-x''(t) \cdot y'(t) + x'(t) \cdot y''(t)\right)}{\left(\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}\right)^3},$$

obtém~se a curvatura da tractriz dada por:

$$k(t) = tan(t).$$

Considerando a parametrização da tractriz no plano xz, dada por:

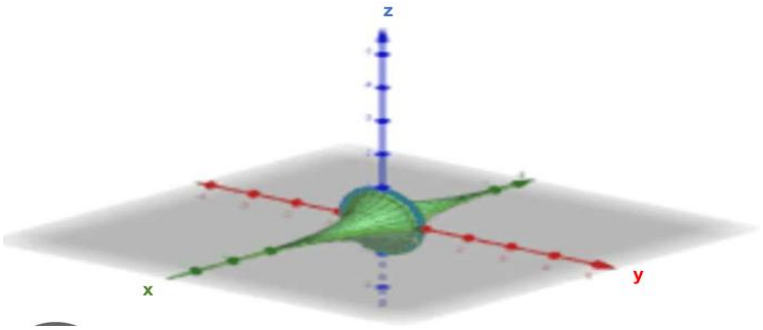
$$\alpha(t) = \left(sen(t), 0, cos(t) + ln\left|tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right), t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

obtém-se, ao rotacionar essa curva em torno do eixo z, a parametrização da pseudoesfera dada por:

$$X(t,\theta) = \left(sen(t)cos(\theta), sen(t)sen(\theta), cos(t) + ln\left|tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right), t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \theta \in (0,2\pi),$$

conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Modelagem da Pseudoesfera



Fonte: Elaborada pela autora no software GeoGebra (2026)

A primeira forma fundamental é dada por:

$$I_q(w) = a^2E(t,\theta) + 2abF(t,\theta) + b^2G(t,\theta),$$

onde $w = aX_t + bX_\theta$ é um vetor tangente à pseudoesfera e $E(t,\theta), F(t,\theta)$ e $G(t,\theta)$ os coeficientes da primeira forma fundamental.

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtêm-se:

$$E(t,\theta) = cot^2(t); F(t,\theta) = 0 \text{ e } G(t,\theta) = sen^2(t).$$

ISSN: 2358-8829

Logo, a primeira forma fundamental da pseudoesfera é:

$$I_q(w) = a^2cot^2(t) + b^2sen^2(t),$$

De maneira similar, os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por:

$$e(t,\theta) = -cot(t); f(t,\theta) = 0 \text{ e } g(t,\theta) = cos(t)sen(t).$$

Assim, para uma direção $w = aX_t + bX_\theta$, no plano tangente, a segunda forma fundamental é dada por:

$$II_q(w) = -a^2cot(t) + b^2cos(t)sen(t).$$

Sendo a curvatura gaussiana K dada pela relação:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Substituindo os coeficientes calculados:

$$K = \frac{(-cot(t)cos(t)sen(t) - 0^2)}{cot^2(t)sen^2(t) - 0^2}.$$

Segue que:

$$K = -\frac{cos(t)}{cot(t)sen(t)} = -\frac{cos(t)}{cos(t)} = -1.$$

Assim, verifica-se analiticamente que a pseudoesfera possui curvatura gaussiana constante e negativa.

Retornando à análise geométrica da tractriz, sua evoluta é determinada pela curva $\bar{\alpha}(t)$, dada por:

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}n(t),$$

onde $k(t)$ e $n(t)$ são respectivamente, a curvatura e o normal unitário da tractriz.

Substituindo a parametrização da tractriz, o vetor normal e a curvatura obtidos anteriormente, tem-se:

$$\bar{\alpha}(t) = \left(sen(t), cos(t) + ln\left|tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right) + \frac{1}{tan(t)}\left(cos(t), -sen(t)\right).$$

Como $\frac{1}{tan(t)} = cot(t)$, segue que:

$$\bar{\alpha}(t) = \left(sen(t) + cot(t)cos(t), cos(t) + ln\left|tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| - cot(t)sen(t)\right).$$

Simplificando, obtém-se a parametrização reduzida da evoluta da tractriz:

$$\bar{\alpha}(t) = \left(csc\ (t), ln\left|tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right).$$

Considerando $x(t) = csc(t)$ e $y(t) = ln\left|tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|$ e utilizando a identidade $tan\left(\frac{t}{2}\right) = csc(t) - cot(t)$, obtém-se:

$$e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Isolando o radical, elevando os membros ao quadrado e reorganizando os termos, obtemos:

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = cosh(y).$$

Dessa forma, verifica-se analiticamente que a evoluta da tractriz corresponde a uma catenária.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise desenvolvida permitiu estabelecer, por meio de relações trigonométricas, a parametrização da tractriz e sua extensão para a construção da superfície pseudoesférica. A partir dessas construções, verificou-se que a pseudoesfera apresenta curvatura gaussiana constante e negativa $(K = -1)$ e que a evoluta da tractriz pode ser identificada analiticamente como uma catenária.

Esses resultados evidenciam a relação geométrica entre a tractriz, a pseudoesfera e a catenária, mostrando como o estudo de uma curva a partir da Geometria Diferencial pode conduzir à construção e à análise de uma superfície e de sua evoluta, permitindo obter essas propriedades a partir de relações trigonométricas, partindo da construção geométrica da tractriz.

Conclui-se, portanto, que o estudo possibilitou compreender as relações entre curvas e superfícies na Geometria Diferencial, além de possibilitar o aprofundamento de outras propriedades geométricas associadas à tractriz e à pseudoesfera, bem como de suas conexões com outras curvas, favorecendo a visualização de conceitos abstratos e contribuindo para uma formação sólida do professor de matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico – FUNCAP pelo apoio financeiro por meio da bolsa de pesquisa de Iniciação

Científica. Ao meu orientador, Prof. Dr. Danilo Ferreira da Silva, pela oportunidade, pelo mérito de orientação, pelos conselhos e pelo simples fato de nos motivar a acreditar que somos capazes de alcançar nossos objetivos. Por fim, mas não menos importante, ao meu colega Geovan Manoel de Sousa da Silva, com quem compartilhei anseios e sonhos e com quem construí uma amizade para a vida.

Palavras-chave: Geometria Diferencial, Tractriz, Pseudoesfera, Curvatura Gaussiana, Catenária.

REFERÊNCIAS

TENENBLAT, K**. Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2008.

VIEIRA, Gabriel; SIQUEIRA, Mônica. Uma História Sobre a Tractriz. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 24, n. 48, p. 33–50, 2024. DOI: 10.47976/RBHM2024v24n4833-50. Disponível em: https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/390. Acesso em: 13 jul. 2026.