ISSN: 2358-8829

JOGO DE VORONOI NO PLANO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Carolina Lupifierio de Queiroz [1]

INTRODUÇÃO

Diante dos desafios relacionados ao ensino de Matemática, diferentes abordagens metodológicas influenciam o interesse dos estudantes e têm o potencial de estimular a aprendizagem. Neste sentido, este trabalho destaca a integração entre teoria, prática e o uso de tecnologias digitais, buscando aplicar a Teoria dos Jogos no ensino de Geometria Plana em um contexto de estratégia e otimização, tendo como base o Modelo de *Hotelling* bidimensional, com apoio computacional.

Mais especificamente, este artigo apresenta uma proposta didática interdisciplinar que, por meio de um Jogo de Voronoi, possibilita investigar como a dinâmica competitiva entre jogadores pode favorecer a compreensão de conceitos como mediatriz, equidistância e partição do plano. A visualização das áreas de influência de cada jogador é feita por meio do Diagrama de Voronoi e o *software* GeoGebra é utilizado tanto para a construção do diagrama quanto para as simulações.

A proposta está fundamentada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que aponta como competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em contextos diversos, além de

> investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531).

Do ponto de vista metodológico, a pesquisa caracteriza-se como qualitativa e exploratória, centrada na apresentação e discussão da atividade didática e de suas potencialidades pedagógicas. Desta forma, pretende-se contribuir para o processo de

[1] Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina – UEL, docente da Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP, carolina@uenp.edu.br.

ensino e aprendizagem da Matemática, proporcionando aos professores uma abordagem interdisciplinar que pode ser incorporada em disciplinas que tratam dos conceitos geométricos envolvidos.

REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Teoria dos Jogos e o modelo de *Hotelling* bidimensional

A Teoria dos Jogos fundamenta a análise do comportamento humano em situações de conflito ou de cooperação. No contexto da cooperação, Harold Hotelling (1895–1973) propôs um modelo de estabilidade na competição que, originalmente, analisava como dois vendedores de sorvete em uma praia, representada por uma linha, decidiriam suas posições para maximizar sua clientela, assumindo que os consumidores escolheriam o vendedor mais próximo (COLOMBO, 2025).

A proposta didática se baseia na extensão desse modelo para o espaço bidimensional. Em um plano, os jogadores buscam posicionar-se de modo a capturar a maior área possível. O resultado dessa competição é a formação de um Diagrama de Voronoi, que é uma tesselação gerada a partir das mediatrizes entre pontos de um determinado conjunto, o que possibilita visualizar a proximidade relativa entre eles de acordo com uma métrica de distância pré-estabelecida.

2.2 Jogos de Voronoi e Diagramas de Voronoi

Os Jogos de Voronoi envolvem uma disputa, dentro de uma área delimitada, entre jogadores que competem posicionando um número igual de pontos de acordo com regras estabelecidas. Esses pontos podem ser interpretados como instalações, com os jogadores representando empresas concorrentes do mesmo setor.

Segundo Vallejo Hermosilla (2024), na maioria das variantes do jogo, cada jogador pontua com base na área dentro da região que está mais próxima de seus próprios pontos do que dos pontos do oponente. Esse critério de pontuação consiste em construir um diagrama de Voronoi dentro da região do jogo com base nas instalações de ambos os jogadores e atribuir polígonos (áreas de influência) a cada jogador com base no ponto gerador.

Outras variantes incorporam um conjunto de clientes ou usuários, representados por pontos e distribuídos pela área de jogo. Nesses casos, um diagrama de Voronoi também é construído com base nos pontos posicionados pelos jogadores, e o objetivo passa a ser capturar mais clientes dentro de suas próprias células. Também é comum, nesses cenários, buscar a maximização do número de clientes influenciados.

Na proposta didática, o Diagrama de Voronoi particiona o plano em regiões próximas a cada um dos pontos colocados pelos jogadores. Esses pontos são chamados de geradores. Para cada gerador, existe uma região correspondente, chamada célula de Voronoi, composta por todos os pontos do plano que estão mais próximos daquele gerador do que de qualquer outro.

2.3 O software GeoGebra

O GeoGebra é um *software* gratuito e dinâmico de matemática que integra em um único ambiente Geometria, Álgebra, Cálculo, Estatística, gráficos em duas e três dimensões. Sua interface intuitiva permite construir, visualizar e manipular objetos matemáticos, favorecendo a exploração de conceitos, a formulação de conjecturas e a verificação de resultados. O *software* pode ser acessado online por meio do site *https://www.geogebra.org* e está disponível para download em *https://www.geogebra.org/download.*

No contexto desta proposta, o software atua como um laboratório de experimentação. A manipulação dinâmica permite que o aluno, ao arrastar um ponto gerador, perceba como todas as mediatrizes e fronteiras das células de Voronoi se ajustam instantaneamente. Assim, o estudante consegue ver na prática a definição de mediatriz e utilizar a ferramenta digital para testar estratégias e visualizar as consequências geométricas de suas escolhas no jogo.

MATERIAIS E MÉTODOS

A proposta didática denominada “A Geometria da concorrência” envolve uma situação contextualizada: um festival de música ocorre em um gramado de 10.000 m^2, onde o público está espalhado uniformemente. Três *food trucks* vendem exatamente os mesmos produtos pelos mesmos preços. O objetivo de cada veículo é posicionar-se de

forma a ter a maior área de clientes possível, supondo que cada cliente compra naquele que estiver mais próximo. A atividade é dividida em quatro etapas:

Etapa 1. Contextualização: Apresentação do problema e discussão sobre o Modelo de *Hotelling* bidimensional. Os estudantes assumem a posição de gestores que precisam decidir onde posicionar seus *food trucks* no espaço do festival, representado pelo plano cartesiano. Além disso, são instigados a pensar sobre proximidade entre pontos, possibilitando a introdução aos polígonos de Voronoi e áreas de influência.

Etapa 2. Construção do cenário no GeoGebra: Inicialmente os alunos criam o território com a ferramenta "polígono", aqui representado por um quadrado de $100m$ x $100m$, e então posicionam três pontos dentro dele. A construção do Diagrama de Voronoi é feita com as ferramentas "segmento de reta", "mediatriz" e "interseção de dois objetos". O ícone "área" permite visualizar a abrangência de cada vendedor. O GeoGebra possui a ferramenta "DiagramaDeVoronoi", que possibilita conferir o diagrama construído.

Etapa 3. O jogo de estratégia: Movimentação dos pontos para observar a alteração dinâmica das áreas de influência, divididas em três rodadas: *Cooperação*, onde os alunos tentam posicionar os três pontos de forma que as áreas sejam as mais próximas possíveis; *Competição*, onde fixando dois pontos, o terceiro é movido estrategicamente de tal forma que ocupe a maior área de influência possível, roubando espaço dos adversários; e *O Equilíbrio de Hotelling*, onde dois pontos são fixados no centro do quadrado e o terceiro é movimentado logo ao lado deles.

Etapa 4. Análise crítica: O professor media uma discussão sobre as propriedades geométricas observadas como, por exemplo, do motivo das fronteiras serem retas, sobre o que acontece nos vértices onde as regiões se interceptam e em como a mediatriz garante a equidistância. Além disso, os estudantes são instigados a explicar as estratégias utilizadas em cada etapa e suas consequências, e em como a tecnologia ajudou na visualização da dinâmica.

Esta atividade pode ser aplicada de forma individual ou em grupo em um ambiente equipado com computadores com acesso à internet ou com o *software* GeoGebra instalado. Além disso, foi planejada para ser aplicada com alunos do Ensino Médio, que já tenham consolidado conceitos de Geometria Plana, ou com estudantes de Licenciatura em Matemática, como uma breve introdução à Geometria Computacional, em uma disciplina de Geometria ou de Modelagem.

ISSN: 2358-8829

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise mostra que a metodologia apresentada tem o potencial de facilitar o entendimento dos conceitos geométricos, ao colocar os estudantes no papel de tomadores de decisão em um cenário estratégico.

Na primeira etapa, quando confrontados com o posicionamento dos geradores, a intuição pode levar o aluno a colocar o ponto o mais distante possível do concorrente. Por outro lado, ao traçar a mediatriz do segmento que une dois geradores destaca-se que qualquer ponto sobre essa linha está exatamente à mesma distância de ambos os geradores, o que fortalece o conceito de mediatriz como lugar geométrico.

Com três pontos, a construção do Diagrama de Voronoi permite que os estudantes observem que a célula de um jogador pode ser espremida ou expandida dependendo da posição relativa dos demais. O Diagrama de Voronoi permite explorar:

(a) Equidistância: a compreensão de que os pontos na fronteira entre duas células estão à mesma distância de dois geradores;

(b) Mediatriz como divisor das regiões de influência: a visualização da mediatriz não apenas como uma linha perpendicular no ponto médio, mas como uma fronteira de decisão em um jogo de ocupação de espaço; e

(c) Partição do plano: a ideia de que o plano pode ser totalmente preenchido por polígonos convexos cujas formas dependem estritamente da posição relativa dos pontos geradores.

Além disso, a discussão sobre os vértices do diagrama possibilita integrar a atividade ao estudo de pontos notáveis por meio da identificação de que o ponto onde as três células se encontram é o centro de uma circunferência que passa pelos três geradores correspondentes (circuncentro).

Outro ponto de destaque é a análise estratégica baseada no modelo de Hotelling. No modelo linear, os competidores buscam se agrupar no centro (equilíbrio de Nash). No plano bidimensional do Jogo de Voronoi, os estudantes tendem a perceber que o posicionamento central nem sempre é o ideal, pois pode ser cercado por múltiplos concorrentes. Aqui é exigido que o aluno estime áreas e verifique hipóteses por meio da medição de polígonos no GeoGebra. A mediação de discussões pelo professor permite não só que os alunos percebam os conceitos teóricos aplicados na atividade, mas também que desenvolvam o raciocínio lógico e estratégico. A terminologia do jogo (ataque, defesa, ocupação) é traduzida para termos geométricos (traslação de pontos, cálculo de

distâncias, interseção de mediatrizes). A linguagem fortalece a interdisciplinaride e mostra que a matemática é uma linguagem que pode modelar dinâmicas sociais e econômicas complexas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou apresentar uma proposta didática que possibilita investigar como a dinâmica competitiva pode potencializar o ensino e a aprendizagem de conceitos de Geometria Plana, por meio da contextualização e da formalização dos Diagramas de Voronoi, dando um significado prático aos conceitos de mediatriz e equidistância. Além disso, mostrou que a simplificação operacional proporcionada pelo *software* GeoGebra facilita as construções e simulações da atividade, viabilizando a formulação de conjecturas e a investigação e validação de hipóteses.

De forma geral, a proposta apresentada cumpriu com os objetivos estabelecidos e está alinhada com as demandas contemporâneas que destacam o protagonismo do aluno e a aprendizagem por descoberta, com apoio da tecnologia digital. Para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação prática em sala de aula com coleta de dados e análise dos resultados.

Palavras-chave: Ensino de Geometria, Teoria dos Jogos, Diagrama de Voroni, Jogos educativos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Ministerio da Educacao. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

COLOMBO, S. **The Hotelling Model**. In: *Spatial Economic Modelling: An Introduction to Key Competition Models*. Cham: Springer, 2025. p. 1–25.

VALLEJO HERMOSILLA, L. **Juego de Voronoi Manhattan**. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidad de Sevilla, Sevilha, 2024.