

Obstáculos Epistemológicos e Linguagem de Alunos do Ensino Médio na Aprendizagem de Funções Exponenciais e Logarítmicas

Walter Aparecido Borges¹

Maria Helena Palma de Oliveira²

Resumo

Este estudo se propõe a identificar características importantes na linguagem produzida por alunos de 1º ano do ensino médio diante de obstáculos epistemológicos na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas em aulas de matemática. Busca identificar características de ecos e de vozes (Boero, Pedemonte e Robotti, 1997) nos discursos de alunos motivados pela resolução de problemas com funções exponenciais e logarítmicas previamente elaboradas, com foco nos obstáculos epistemológicos que envolvem esse conteúdo matemático. São também fundamentos teóricos os estudos de Vigotsky, de Bakhtin e de Wittgenstein. Os obstáculos epistemológicos, definidos por Bachelard (1938), foram adotados por Brousseau (1998) que referindo-se à Bachelard e à Piaget, considera que o erro não é só efeito da ignorância, do acaso e da incerteza, mas o efeito de um conhecimento anterior que tinha seu sucesso e seu interesse.

Palavras-chave: Educação matemática, vozes e ecos, obstáculos epistemológicos, funções exponenciais e logarítmicas.

1. Introdução

Nossa atuação como professor de matemática do ensino médio nos últimos anos e as leituras que fizemos em educação matemática, sobre obstáculos epistemológicos nos conduziram às seguintes indagações a respeito desses obstáculos e linguagem dos alunos:

- a. Considerando o salto histórico dos logaritmos, a aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas por alunos de 1º ano do Ensino Médio permite a superação de obstáculos epistemológicos?
- b. Quais as características que se destacam na linguagem de alunos do 1.º ano de Ensino Médio na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas?

2. Objetivos

¹ w.borges.ltda@terra.com.br UNIBAN-SP

² mhelenapalma@terra.com.br UNIBAN-SP

Este trabalho pretende identificar características importantes na linguagem produzida pelos alunos diante de obstáculos epistemológicos na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas de alunos de 1.º ano do ensino médio em aulas de matemática. Nesse sentido, mais especificamente, busca identificar características importantes de ecos e de vozes nos discursos dos alunos motivados por problemas com funções exponenciais e logarítmicas previamente elaboradas, com foco nos obstáculos epistemológicos. A escolha das atividades de funções exponenciais e logarítmicas deve-se ao fato de que pretendemos caracterizar um salto informacional, (BROUSSEAU, 1998) com a passagem das atividades de funções polinomiais de 1.º e 2.º graus para funções exponenciais e logarítmicas e dessa forma identificar superações de possíveis obstáculos epistemológicos.

3. Obstáculos Epistemológicos

Bachelard (2002) desenvolveu o conceito de obstáculos epistemológicos, presentes no ato de conhecer, realçando que este se dá contra um conhecimento anterior e que destrói conhecimentos anteriores mal estabelecidos. Os obstáculos epistemológicos, segundo Bachelard (2002), aparecem na essência do próprio ato de conhecer, no qual podem ser detectadas causas de estagnação, regressão ou de inércia.

Os obstáculos epistemológicos foram introduzidos na didática da matemática por Guy Brousseau. Para Brousseau (1998), podemos admitir que a constituição de um significado implique em uma constante interação dos alunos com situações problemáticas, interação dialética na qual se envolve o conhecimento anterior, submetidos a revisar, adicionar, modificar ou rejeitar novos conceitos. A didática tem como objetivo principal estudar as condições a serem cumpridas em situações ou problemas propostos aos alunos para favorecer o surgimento, o funcionamento e a rejeição destas sucessivas concepções. Dessa forma, podemos deduzir desse regime descontínuo de aquisições que as características informativas dessas situações devem variar também por saltos (BROUSSEAU 1998).

Para Brousseau(1998), os obstáculos podem ser classificados em: obstáculos de origem ontogênica, de origem didática e de origem epistemológica.

Os obstáculos de origem ontogênica são os que surgem devido às limitações (neurofisiológicas, entre outras) do aluno em algum momento do seu desenvolvimento. O

aluno desenvolve os conhecimentos apropriados aos seus meios e seus objetivos nessa idade; obstáculos de origem didática são aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou um projeto do sistema educativo; os obstáculos de origem epistemológica são aqueles que não se pode nem se deve fugir, por causa do seu papel constitutivo do conhecimento referido. Podemos encontrá-los na história dos conceitos (BROUSSEAU, 1998).

Para Bachelard (1938, apud BROUSSEAU 1998) o obstáculo epistemológico estaria reservado às ciências experimentais, mas para Brousseau (1998), transpor a noção de obstáculo epistemológico para a educação matemática foi possível e até necessário no desenvolvimento da teoria das situações didáticas nos anos 1970. Ele deriva do conceito de salto informacional, uma das rupturas que surgem na aprendizagem, quando concepções adquiridas não desaparecem em benefício de uma nova concepção: as concepções resistem, provocam erros e tornam-se assim obstáculos.

Por exemplo, se a um aluno sempre foi explicado que a multiplicação de dois números naturais maiores do que 1 é uma repetição de somas, que faz o produto aumentar em cada fator, ele terá dificuldades para interpretar e para utilizar a operação $0,2 \times 0,3 = 0,06$; terá dificuldade também para compreender que um número natural 4 tinha um antecessor, o número natural 3, e que agora o número racional 0,4 não tem um antecessor. O autor conclui que o obstáculo é um conhecimento perfeitamente legítimo e inevitável (BROUSSEAU, 2008).

4. Linguagem

A relação que Vygotsky (1993) estabelece entre pensamento e linguagem constitui-se um dos fundamentos para este trabalho. Interessa de modo mais específico a distinção, a relação e o processo de transformação que envolvem o entendimento dos conceitos cotidianos (ou espontâneos) e dos conceitos científicos no processo de aprendizagem. Nesse sentido, esclarece

O desenvolvimento de conceitos científicos deve apoiar-se de modo indispensável em um determinado nível de maturação de conceitos espontâneos (...). Por outro lado, devemos admitir que o aparecimento de conceitos de tipo mais elevado, como são os conceitos científicos, não pode deixar de acusar a influência dos conceitos espontâneos surgidos com anterioridade, já que nem uns nem outros estão encapsulados na consciência da criança, nem estão separados por um muro intransponível. Não fluem por canais isolados, mas se encontram imersos em um processo de contínua interação, que deverá ter como resultado as generalizações de estrutura superior, próprias dos conceitos científicos que

produzem mudanças estruturais nos conceitos espontâneos (VYGOTSKY, 1993, p.194).

Na perspectiva de Vygotsky, o conceito científico caracteriza-se também por ser mediado e consciente, isto é, é mediado por outros sujeitos e por outros conceitos prévios que permitirão atingir um nível de generalização que passa então a reestruturar também os conceitos anteriores. Oliveira (1999), considerando a perspectiva vygotskyana, desenvolve três questões sobre o desenvolvimento conceitual e afirma que os conceitos devem ser entendidos como um evento de desenvolvimento que libera o ser humano de impressões imediatas; os conceitos não se constituem como entidades isoladas, mas como elementos de um sistema de inter-relações complexo; além disso, afirma que os conceitos não se constituem entidades estáveis, mas como um produto de processos de construção conjunta de significações.

Ainda sob a perspectiva de Vygotski, o crescimento intelectual da criança se dá através do amadurecimento entre o saber comum da criança e o saber teórico e que o saber teórico deve se relacionar com o saber comum da criança. Mas esse amadurecimento não ocorre de maneira espontânea, o conhecimento teórico é construído socialmente ao longo da história.

Bakhtin afirma que a verdadeira substância da língua não é constituída de um sistema abstrato de formas lingüísticas, mas pelo fenômeno social da interação verbal, cujo meio de realização é a enunciação (BAKHTIN, 2006). De acordo com o autor, o diálogo situa-se nessa classificação, sendo considerado a forma mais importante de interação verbal.

Segundo Bakhtin (2006), um tema é um atributo da enunciação completa; pode pertencer a uma palavra isolada se essa palavra encerrar uma enunciação global. A significação, por outro lado, pertence a um elemento ou a um conjunto deles na sua relação com a totalidade.

Recorremos também a Wittgenstein, para quem a importância da palavra é o seu uso no contexto no qual ela ocorre:

...Na *práxis* do uso da linguagem, um parceiro enuncia as palavras, o outro age de acordo com elas; na lição de linguagem, porém, encontrar-se-á *este* processo: o que aprende *denomina* os objetos. Isto é, fala a palavra, quando o professor aponta para a pedra. - Sim, encontrar-se-á aqui o exercício ainda mais simples: o aluno repete a palavra que o

professor pronuncia - ambos processos de linguagem semelhantes...
(Wittgenstein, 1999, p 30).

Para o autor, todo o processo de uso de palavras assemelha-se a um jogo, à maneira pela qual as crianças aprendem a sua língua materna. Estes são os jogos chamados pelo autor de jogos de linguagem.

5. Jogo de Vozes e Ecos

Boero, Pedemonte, Robotti (1997) propuseram-se a construir um novo referencial teórico para organizar e analisar a abordagem dos estudantes a um saber teórico com a pretensão de superar os limites dos ensinamentos tradicional e construtivista. Tal referencial é chamado pelos autores de “jogo de vozes e ecos”, apoiado na análise vygotskiana da distinção entre conceito cotidiano e conceito científico e na ideia bakhtiniana de voz que possibilita recorrer a experiências de ensino anteriores. O referencial supõe que “vozes” na história da matemática e das ciências ativem uma espécie de jogo, o referido jogo de vozes e ecos, próprios para a mediação de elementos importantes do saber teórico.

Para os autores, existe um difícil problema educativo da abordagem dos elementos básicos da atual cultura científica, destacando-se os teoremas, a linguagem algébrica e a modelagem matemática de fenômenos naturais e sociais; usam a expressão “saber teórico” para indicar estes elementos da cultura matemática e consideram pouco produtivas as estratégias educativas comumente adotadas nas escolas.

Afirmam que tanto na Itália, país de origem dos pesquisadores, quanto em outros países, essas estratégias se resumem a explicações das teorias pelos professores aos alunos e a tarefa destes é a de entender a teoria e mostrar esse entendimento nas perguntas e nas provas escritas ou em aplicações na solução de problemas. Essa maneira de ensinar traz resultados bem conhecidos: para a maioria dos alunos, a teoria estudada é a ferramenta para resolver exercícios escolares, que pouco interfere em suas formas profundas de raciocinar.

A quais aspectos do saber teórico devem ser expostos os alunos? Na opinião dos autores, os aspectos devem focar os grandes saltos na história cultural da humanidade, mesmo que se aprofunde a lacuna com o conhecimento comum. Exemplos seriam a teoria da queda dos corpos de Galileu e de Newton, o modelo probabilístico das transmissões das

características hereditárias de Mendel, as demonstrações matemáticas. Estes “saltos” tem um conteúdo contraintuitivo. São revoluções históricas que exigiram superações de obstáculos epistemológicos (Bachelard), e incorporações de conhecimentos anteriores da história da cultura.

De acordo Boero, Pedemonte e Robotti (1997), os ecos individuais podem ser classificados como ecos de superfície, ecos mecânicos, ecos assimilativos e ecos de ressonância. Os ecos de superfície são produzidos em um esforço para adaptar-se a uma voz que requer ecos, mas sem chegar à compreensão do conteúdo da "voz"; distinguem-se pela presença de termos e expressões retirados da "voz", usados em formas inadequadas, contradições internas, confusões entre suas concepções e idéias estabelecidas na voz.

Os ecos mecânicos reconhecem, por exemplo, no caso de uma paráfrase de uma “voz”, ou na resolução de um aplicativo padrão; o aluno não ultrapassa o nível de eco mecânico se não é capaz de usar o conteúdo ou o método da “voz” para lidar com situações que são apenas parcialmente comparáveis com a "voz".

Ecos assimilativos ocorrem quando o aluno é capaz de transferir o conteúdo ou o método de "voz" para outras situações emite apenas parcialmente semelhanças propostas pelo professor; o aluno não supera o nível de assimilação do eco se as situações problemáticas desestabilizarem muito sua maneira de pensar sobre fenômenos naturais ou entes matemáticos não contidos na “voz”.

Os ecos de ressonância acontecem quando em um processo de aprendizagem o aluno se apropria da "voz" como uma forma de reconsiderar e representar sua experiência, e é capaz de alterar o registro lingüístico, através de um esforço de seleção e análise de fatores relevantes (aprofundamento) encontrar exemplos e situações semelhantes para o conteúdo da "voz", processar adequadamente a voz atual multiplicando-a. Uma ressonância profunda se pode reconhecer, em particular durante um processo de formalização: a modelagem matemática usando expressão algébrica vem vinculada ao fenômeno físico e ao gráfico cartesiano, que o representa.

Consideramos, neste trabalho a importância dada por Vygotsky e por Wittgenstein às imitações, do ponto de vista dos ecos mecânicos. Consideramos também o estudo dos fenômenos lingüísticos de Bakhtin no que se refere à mudança de registros lingüísticos quando se verifica a ocorrência de ecos de ressonância. Bachelard e Brousseau contribuem com as noções de obstáculos epistemológicos a serem superados.

6. Método

Considerando a questão de Boero, Pedemonte, Robotti (1997) em “Vozes e Ecos” sobre quais devem ser os aspectos do saber teórico aos quais os alunos devem ser expostos, que se privilegiem conteúdos contraintuitivos, escolhemos como atividades as funções exponenciais e logarítmicas, que representam um “salto”, uma revolução histórica que exigiu superações de obstáculos epistemológicos.

Serão sujeitos desta pesquisa alunos de uma turma de 1.º ano de Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo. Os dados para análise serão produzidos dados com base em resolução de problemas de matemática do ensino médio e nos processos interventivos do professor. A ênfase será dada aos discursos ocorridos nesses processos interativos, por isso a intervenção será gravada em áudio e vídeo. Questões específicas serão selecionadas e apresentadas aos alunos para resolução no contexto de sala de aula de Matemática. Trata-se de alunos do ensino médio, turmas do primeiro ano. Os temas abordados são os que constam do currículo do ensino médio, relacionados nas Orientações Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2006).

Escolhemos para a pesquisa questões relacionadas com funções exponenciais e logarítmicas, extraídas das avaliações do ENEM e do SARESP, que são conteúdos desenvolvidos no terceiro bimestre letivo do primeiro ano do ensino médio. A escolha de questões de avaliações oficiais ocorre porque as mesmas estão de alguma forma legitimadas, além de terem sido elaboradas com base nas orientações curriculares do ensino médio. Outras questões do mesmo tipo poderão ser introduzidas conforme a evolução do estudo demonstre a necessidade.

Buscaremos estudar, por meio da observação, o ambiente de aprendizagem das salas de aula objeto do estudo, de preferência de escola pública, com alunos do ensino médio regular, do primeiro ano.

Os alunos serão convidados a participar da pesquisa resolvendo problemas com conteúdos constantes do conteúdo curricular relativo ao 1º ano do ensino médio, especificamente de funções exponencial e logarítmica. A cada grupo de alunos selecionados para participar da pesquisa será apresentado um problema típico relacionado

às avaliações do ENEM ou do SARESP³, com quantidade de questões que demandem o tempo característico de uma aula de 50 minutos.

Um estudo piloto foi programado e realizado em três encontros de duas horas, aos sábados, com 4 alunos do 1.º ano do Ensino Médio. As atividades com funções exponenciais e logarítmicas são previstas para acontecer no 3.º bimestre das turmas do primeiro ano do Ensino Médio

Planejamos para esse estudo piloto um texto com a história da invenção dos logaritmos, como segue, que foi apresentado aos alunos com a história da invenção dos logaritmos, que pode ser caracterizado dentro da perspectiva de Boero como voz do saber teórico que deve ser internalizado pelo aluno em seu processo de aprendizagem.

A invenção dos logaritmos

Introdução histórica

John Napier e a história dos logaritmos

John Napier não era matemático. Era um proprietário escocês que tinha grandes fazendas para administrar. A história conta que trabalhou na invenção dos logaritmos durante vinte anos, a data aproximada da origem das idéias de logaritmo é o ano de 1594, já que a data de publicação das tabelas de Napier, com título de *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos) é 1614.

A motivação para a invenção dos logaritmos foi a simplificação dos cálculos de números grandes ou com muitas casas decimais. A idéia de Napier era a de substituir multiplicações, divisões e radiciações por operações simples de somar e subtrair, como podemos observar no exemplo abaixo:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Essa tabela pode continuar com a seqüência inferior dos expoentes de 2 e a superior com os resultados dessas potências. Para se obter, por exemplo, 128×256 basta somar os expoentes de 128 e de 256 ($7+8=15$) e verificar na tabela que 15 é o expoente de 2 para 32768. Concluimos assim que $128 \times 256 = 32768$. Por outro lado, se precisamos calcular $32768/256$, subtraímos o expoente 8 de 15 obtendo 7 que é o expoente para 128, concluindo que $32768/256=128$.

³ ENEM : Exame Nacional do Ensino Médio; SARESP: Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

O problema dessa tabela com potências de 2 é que ela cresce muito rapidamente. Napier usou uma tabela com um número muito próximo de 1, o número $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 0,9999999$.

Para evitar decimais, Napier multiplicou cada potência por 10^7 .

Assim, $N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, L é o logaritmo de Napier do número N. Dessa maneira, o logaritmo de 10^7 é 0, pois $10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^0 = 10^7$; o logaritmo de 9999999 é 1, pois $10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^1 = 9999999$; o logaritmo de 9999998 é 2 e assim por diante.

Cálculo com números pequenos, as operações aritméticas:

Efetue:

a) $1236 \div 12 =$

b) $1498 \div 14 =$

Cálculos com números “grandes”, a idéia dos logaritmos:

Sabendo que $3^{12} = 531441$, $3^7 = 2187$ e que $3^5 = 243$, use as propriedades de potência e efetue:

a) $531441 \div 2187 =$

b) $531441 \div 243 =$

c) $243 \times 2187 =$

d) $\sqrt{531441} =$

e) $\sqrt[3]{531441} =$

f) $\sqrt[4]{531441} =$

Sabendo que $10^{0,3010} = 2$ e que $10^{0,4771} = 3$, calcule o valor do expoente de 10 para os valores:

a) 12

b) 18

c) 108

Use a propriedade distributiva para calcular os primeiros números de Napier

como Napier calculou, a^2 e a^3 .

sabendo que $a = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$, $a^2 = a\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = a - \frac{a}{10^7}$ e assim por diante.

7. Algumas considerações

Tendo em vista o limite de apresentação deste trabalho, apresentamos uma síntese do estudo piloto a seguir.

Os alunos do grupo fizeram a divisão de 1236 por 12, atividade que compõe o texto do estudo piloto, obtendo como resultado 13. Cabe ressaltar que pelo menos duas alunas que compuseram o grupo costumam se destacar nas atividades de matemática em sala de aula. Diante da pergunta do professor se o resultado estava certo, verificaram que não quando fizeram a multiplicação de 13 por 12. O grupo passou então a discutir como se faz a operação, o que deu errado nas contas que fizeram. A discussão durou cerca de 30 minutos até que o aluno L percebeu que não podia “baixar” outro número do dividendo antes do resultado com o número anterior “baixado”. Assim, chegaram à conclusão de que 1236 dividido por 12 é 103. Costa (2009) verificou em seu trabalho que esse erro pode ser encontrado ainda em estudantes do ensino médio e superior.

Muitas são as dúvidas que os alunos apresentam quando são colocados diante de um problema de matemática, mesmo quando se trata de uma operação de divisão entre números naturais a ser feita por alunos do primeiro ano do ensino médio. A ativação dos ecos dos alunos por meio de uma voz histórica parece facilitar a exposição dessas dúvidas que permanecem com eles durante muito tempo.

Além disso, a participação intensa dos alunos na discussão sobre o erro que cometeram ao dividir 1236 por 12, nesta parte do trabalho piloto, aponta para um encorajador prosseguimento com os outros obstáculos previstos, como as operações com números racionais não inteiros, com números negativos e com expoentes fracionários com a expectativa de que mais dúvidas surjam dos diálogos dos alunos.

8. Referências Bibliográficas

BACHELARD, Gastón. **A Formação do Espírito Científico: Contribuições Para Uma Psicanálise do Conhecimento**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2002.

BAKHTIN, Mikhail **Marxismo e Filosofia da Linguagem**. Trad. Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira, 12ª Edição. São Paulo: Hucitec, 2006.

BOERO, Paolo, PEDEMONTE, Bettina, ROBOTTI, Elisabetta. **Approaching Theoretical Knowledge Through Voices and Echoes: a Vygotskian perspective**. Disponível em <<http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Boero/Boero97It.html>>, ultimo acesso em 01/12/2010

BROUSSEAU, Guy **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy, **Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique**, in *Théorie des Situations Didactiques*, P.115-160. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

COSTA, Letícia Vieira Oliveira, **Números Reais no Ensino Fundamental: Alguns Obstáculos Epistemológicos**, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Programa de Pós Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009

OLIVEIRA, Marta Kohl. Três questões sobre desenvolvimento conceitual. In: OLIVEIRA, Marcos Barbosa; OLIVEIRA, Marta Kohl. **Investigações cognitivas: conceitos, linguagem e cultura**. Porto Alegre: ArtMed, 1999. p. 55-64.

VYGOTSKY, Lev Semenovich (1934). **Pensamiento y Lenguaje. Conferências sobre Psicología**. Obras escogidas II, Madrid, Viscor, 1993.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. Trad. José Carlos Bruni coleção Os Pensadores. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.