O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM POR MEIO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Pedro Merlin Ferraz [1]
Lucas Yusuke Nemoto [2]
Érica Gambarotto Jardim Bergamim [3]
Sandra Regina D´Antonio Verrengia [4]

RESUMO

O presente artigo tem por objetivo relatar e analisar a aplicação de uma atividade de Investigação Matemática voltada ao ensino de Análise Combinatória em turmas de 2º ano do Ensino Médio, no contexto do Programa de Iniciação à Docência (PIBID), desenvolvido em uma escola pública do noroeste do Paraná. A proposta fundamenta-se nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que recomenda o desenvolvimento de competências relacionadas à investigação, formulação de conjecturas e resolução de problemas, e dialoga com as diretrizes do Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (2021), que orienta o ensino desse conteúdo no referido ano escolar. A atividade foi planejada e conduzida pela professora supervisora, com acompanhamento de licenciandos participantes do PIBID. Estruturou-se em duas etapas: inicialmente, os alunos foram organizados em grupos e convidados a explorar situações-problema contextualizadas, relacionadas à formação de filas e grupos, com o intuito de identificar regularidades e levantar hipóteses; em seguida, foi realizada a formalização dos conceitos de Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples. O percurso metodológico da atividade proposta seguiu características da Investigação Matemática, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2015). A análise dos registros da atividade evidenciou que os estudantes utilizaram múltiplas estratégias de resolução, como tentativa e erro, representações gráficas e uso de materiais concretos, o que possibilitou a construção gradual de conceitos combinatórios. A mediação da professora e dos pibidianos, por meio de questionamentos direcionados, foi decisiva para instigar o raciocínio, estimular a abstração e favorecer a generalização de resultados. O compartilhamento das hipóteses em sala, com apresentação no quadro, potencializou a discussão coletiva e fortaleceu a autonomia discente. Além disso, evidencia-se o papel formativo na articulação entre teoria, prática e reflexão crítica sobre o ensino da Matemática.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Investigação Matemática, Ensino e aprendizagem de Matemática, PIBID.

INTRODUÇÃO

[1] Graduando do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM, PIBIDiano, ra129220@uem.br;
[2] Graduando do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM, PIBIDiano, ra129643@uem.br;
[3] Doutora pelo Curso de Pós-Graduação em Educação para Ciência e Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM, erica.gambarotto@escola.pr.gov.br;
[4] Professora Orientadora: Coordenadora, Departamento de Matemática - UEM, srdantonio@uem.br;
[5] Agência Financiadora: CAPES

No processo de formação docente se faz relevante o estudo teórico das realizações no âmbito educacional, principalmente aquelas vinculadas ao processo de ensino a aprendizagem. Mas, além disso, destaca-se a relevância de, no processo formativo docente, direcionar o olhar para a observação e análise das circunstâncias que permeiam as práticas educacionais. Nesse sentido, ao se deparar com essa dinâmica em um ambiente escolar, torna-se essencial refletir sobre os atos e as relações estabelecidas nesse espaço, sobre especialmente o vínculo entre docente e discente no processo de construção do conhecimento.

Tendo isso em vista, ainda, no processo formativo, é pertinente refletir sobre o estabelecimento de relações entre os objetivos de aprendizagem que se quer alcançar e as estratégias metodológicas adotadas para atingir essa finalidade. Nessa perspectiva, no campo da Matemática, a literatura aponta diversas Metodologias, como História da Matemática, Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Tecnologias, Jogos, Materiais Manipuláveis e Investigação Matemática. Esta última tem despertado especial atenção de pesquisadores, sobretudo por ser recomendada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que, na área de Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, enfatiza o desenvolvimento de habilidades relacionadas aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas (Brasil, 2018).

Diante disso, considerando a atuação dos dois primeiros autores em uma escola-campo por meio do Programa de Iniciação à Docência (PIBID), na qual foi observada a aplicação de uma atividade envolvendo Investigação Matemática para introduzir conceitos relacionados a alguns métodos de contagem estudados em Análise Combinatória em turmas de 2º ano do Ensino Médio, este texto tem por objetivo relatar a observação dessa atividade, bem como o processo de desenvolvimento das resoluções elaboradas pelos discentes.

REFERENCIAL TEÓRICO

Dentre as habilidades que devem ser desenvolvidas no Ensino Médio pelos estudantes, tem-se: “(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore” (Brasil, 2018, p. 537). Em particular, no estado do Paraná, o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (2021), recomenda que o estudo da Análise Combinatória deva ser realizado, especialmente, no 2º ano do Ensino Médio. Em concordância com isso, os autores, ao serem introduzidos para a atuação na escola-campo, observaram o andamento do referido conteúdo.

Tendo em vista essa habilidade relacionada ao estudo de análise combinatória, identificamos que dentre as competências específicas da matemática, trazidas na BNCC destaca-se:

> "**Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas**, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas". (Brasil, 2018, p. 523, grifo nosso)

Observando tal indicação, observamos que ela dialoga com o que é discutido por Lamonato e Passos (2011, p. 62), segundo os quais "em uma exploração-investigação matemática na Escola Básica, não se busca que os alunos obtenham 'a resposta certa', antecipadamente esperada pelo professor, mas que eles explorem possibilidades, postulem conjecturas [...]".

Assim, podemos notar que uma abordagem que segue os pressupostos da Investigação Matemática, contribuem para os estudantes estabelecerem conjecturas e estas possam ser refinadas para que os conceitos relacionados aos métodos de contagem possam ser formalizados. Tendo isso em vista, destacamos que Ponte, Brocardo e Oliveira (2015, p. 23), definem a investigação matemática como uma "atividade de ensino-aprendizagem" que envolve quatro principais momentos.

O primeiro momento refere-se ao conhecimento inicial, relacionado à análise e elaboração de questionamentos relacionados ao problema. O segundo momento consiste na formulação de ideias baseadas em suposições elaboradas a partir do problema; essas hipóteses são denominadas conjecturas. O terceiro momento implica a realização de testes dessas conjecturas, a fim de verificar a hipótese. Por fim, na quarta etapa, ocorre a demonstração e a avaliação da situação, que devem vir sempre acompanhadas de uma argumentação que justifique o raciocínio adotado.

Considerando o que foi apresentando nesta seção, nas próximas seções apresentamos alguns aspectos metodológicos adotados para a construção deste relato, descrevemos brevemente sobre o desenvolvimento da atividade de cunho investigativo.

METODOLOGIA

O presente relato se caracteriza como de natureza qualitativa, a qual, segundo D'Ambrosio (2004, p. 12) "tem como foco entender e interpretar dados e discursos". Consideramos isso, tendo em vista que nosso foco é descrever a realização dessa atividade, conforme nossas observações, bem como o processo de desenvolvimento das resoluções elaboradas pelos discentes.

Informamos que a atividade proposta pela professora supervisora do PIBID na escola-campo foi desenvolvida em uma escola pública localizada no noroeste do Paraná. Os alunos pertenciam ao 2º ano do Ensino Médio e estavam distribuídos em seis turmas distintas, em função da integração do Ensino Profissional ao Ensino Médio e das políticas educacionais do Estado do Paraná. Essas turmas eram compostas por estudantes dos cursos de Administração, Desenvolvimento de Sistemas, Jogos Digitais, Marketing e do Novo Ensino Médio, totalizando aproximadamente 180 alunos. Ressaltamos que os dados utilizados neste artigo são decorrentes da turma de 2º ano do Ensino Médio Integrado - Desenvolvimento de Sistemas.

A atividade proposta pela professora supervisora (terceira autora) e observada pelos dois primeiros autores foi desenvolvida na primeira quinzena de março de 2025, sendo utilizadas em torno de 7 horas-aula para sua realização.

Em relação aos instrumentos de coleta de dados, utilizamos as fotos de registro da atividade proposta, bem como dos registros de resolução dos grupos de alunos. Além disso, nos baseamos em anotações feitas durante as observações da aula que realizávamos em uma espécie de diário de campo, registrando, sobre tudo, na intervenção realizada pela professora e pelos pibidianos.

Na próxima seção descreveremos o relato da professora sobre como planejou a atividade e nossas observações acerca de como se deu o encaminhamento dela na referida turma, bem como as resoluções elaboradas pelos grupos de estudantes.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE, RESULTADOS E DISCUSSÕES

Antes de relatarmos como se deu o desenvolvimento da atividade, segundo nossas observações e registros, consideramos importante trazer alguns aspectos do relato da professora supervisora ao nos explicar porque escolheu trabalhar com uma abordagem relacionada à Investigação Matemática para ensinar os métodos de contagem.

Inicialmente destacamos que para a professora que realizou a atividade em sala de aula, sob a perspectiva da Investigação Matemática, tal abordagem tem por objetivo estimular a participação do aluno e fazê-lo perceber, com base nas próprias conjecturas, a origem de fórmulas e conceitos matemáticos.

A professora relatou que foi a primeira vez que trabalhou com o conteúdo de Análise Combinatória. Até então, nunca havia abordado esse tema com nenhuma turma em sua experiência profissional. Ela contou que, quando estudou Análise Combinatória, teve bastante dificuldade, principalmente por não compreender a motivação para o uso das fórmulas, nem de onde elas vinham.

Durante o planejamento da atividade, a docente disse ter refletido sobre como relacionar aquela questão frequentemente apresentada pelos professores: “Quando a ordem importa, usa-se arranjo ou permutação; quando a ordem não importa, usa-se combinação.” Pensou em como poderia partir de uma situação prática e próxima do cotidiano dos alunos, que, a partir da exploração deles, os levasse a compreender, por meio do princípio multiplicativo, a resolução de cada caso proposto. Além disso, queria que percebessem que, a partir do princípio multiplicativo, também seria possível deduzir as fórmulas usadas para calcular arranjo, permutação e combinação.

A professora afirmou buscar elaborar uma atividade que permitisse aos alunos explorar, formular hipóteses e fazer considerações, para que, a partir disso, chegassem a uma espécie de dedução das fórmulas, com intervenções e questionamentos conduzidos por nós. Sabemos que não é simples chegar àquelas fórmulas, e percebemos a dificuldade dos alunos ao circular pelas salas. A intervenção e os questionamentos eram necessários para instigar o pensamento dos estudantes.

Quanto à escolha da metodologia, contou que pesquisou algumas atividades de modelagem, mas concluiu que não se adequavam ao seu objetivo, que era relacionar os três casos (arranjo, combinação e permutação). Assim, decidiu elaborar uma atividade de cunho investigativo, utilizando exemplos de filas e grupos, que percorresse os processos da investigação matemática: introdução do problema, estabelecimento de hipóteses, elaboração de conjecturas e, por fim, a formalização. Ressaltou, porém, que, no momento do planejamento, não se preocupou em seguir rigidamente todas essas etapas. O principal objetivo era que fosse uma atividade investigativa, permitindo aos alunos explorar e, posteriormente, compreender o porquê da utilização daquelas fórmulas no momento da formalização. Também desejava que percebessem que não precisavam ficar presos às fórmulas, já que poderiam resolver qualquer um daqueles casos usando o princípio multiplicativo.

Salientamos que o relato da professora sobre suas intenções e escolhas, dialoga com o anteriormente exposto por Lamonato e Passos (2011) no sentido que dê a intenção dela estava coerente com os propósitos de uma investigação matemática, uma vez que queria que os próprios estudantes explorassem possibilidades e construíssem conjecturas.

Dito isso, a partir de agora nos dedicamos a descrever a atividade proposta.

Inicialmente destacamos que os alunos foram organizados em grupo com, em torno de 4 alunos para discutirem sobre a atividade proposta. Destacamos que a Figura I apresenta a folha utilizada na atividade. Conforme poderá ser visto, a primeira parte (Figura I (a), distribuída no primeiro momento, continha atividades investigativas com casos a serem analisados, que indicavam o conteúdo pertinente a cada tópico da Análise Combinatória. Em cada caso, havia um contexto proposto, como organização de filas e formação de equipes, situações que exigiam interpretação da estrutura de organização, considerando se a ordem importava ou não.

Posteriormente, distribuiu-se a segunda parte, que apresentava a formalização do conteúdo de Análise Combinatória, abrangendo Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples.

Figura I - Folha da Proposta de Atividade de Investigação Matemática e a Formalização dos Conceitos

a) b)

Atividade investigativa – Métodos de contagem

Caso 1 – Organizando filas com todas pessoas de um conjunto

a) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com 2 pessoas.

b) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com 3 pessoas.

c) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com 4 pessoas.

d) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com 5 pessoas.

e) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com n pessoas.

Caso 2 – Organizando filas com algumas pessoas de um conjunto

a) Indique de quantos modos podemos formar filas com 2 pessoas de um conjunto com 3 pessoas.

b) Indique de quantos modos podemos formar filas com 2 pessoas de um conjunto com 4 pessoas.

c) Indique de quantos modos podemos formar filas com 3 pessoas de um conjunto com 5 pessoas.

d) Indique de quantos modos podemos formar filas com 4 pessoas de um conjunto com 5 pessoas.

e) Indique de quantos modos podemos formar filas com 5 pessoas de um conjunto de 5 pessoas.

f) Indique de quantos modos podemos formar filas com p pessoas de um conjunto com n pessoas.

Caso 3 – Organizando equipes com pessoas de um conjunto

a) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 2 pessoas de um conjunto com 3 pessoas.

b) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 2 pessoas de um conjunto com 4 pessoas.

c) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 3 pessoas de um conjunto com 5 pessoas.

d) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 4 pessoas de um conjunto com 5 pessoas.

e) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 5 pessoas de um conjunto de 5 pessoas.

f) Indique de quantos modos podemos formar equipes com p pessoas de um conjunto com n pessoas.

Formalização - Caso 1 (PERMUTAÇÃO SIMPLES)

De modo geral, a pergunta é: de quantas maneiras podemos ordenar em fila *n* objetos distintos? Podemos escolher o primeiro elemento da fila de *n* maneiras; o segundo elemento da fila de *n* – 1 maneiras. Prosseguindo dessa forma e usando o princípio multiplicativo, o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses *n* elementos é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de **permutações simples**. Indicamos por Pn o número de permutações simples de *n* elementos e escrevemos:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

O valor obtido com Pn é também chamado **fatorial** do número natural *n* e indicado por $n!$ (lê-se "fatorial de *n*" ou "*n* fatorial"). Assim, temos:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n \geqslant 1.$$

Formalização - Caso 2 (ARRANJO SIMPLES)

Fique atento! $n-(p-1)$ é o mesmo que $n-p+1$.

Seja A um conjunto com n elementos.

Pode-se encontrar o número $A_{n,p}$ que representa o nº total de grupos ordenados com p elementos dos n elementos dados, assim: para o primeiro elemento do grupo, possui-se n possibilidades. Para o segundo elemento, n-1 possibilidades. Assim por diante até chegar no p-ésimo elemento. Assim, pelo PFC, o número de arranjos pode ser encontrado com:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1))$$

Para tornar a equação mais simples, costuma-se multiplicar no denominador e no numerador por (n-p)!:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1))(n-p)!}{(n-p)!}$$

No numerador, pela definição de fatorial, têm-se:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p* ($p \leq n$) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com *p* dos *n* elementos dados. Indica-se por An,p o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Formalização Caso 3 (COMBINAÇÃO SIMPLES)

A cada combinação de *n* elementos tomados *p* a *p* correspondem $p!$ arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados. Indica-se por Cn,p ou $\binom{n}{p}$ o nº total de elementos tomados p a p e calcula-se por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}.$$

Fonte: Érica Gambarotto Jardim Bergamim [5]

A partir da entrega, os pibidianos que acompanharam a atividade na escola-campo auxiliaram os alunos na resolução das questões e no esclarecimento de dúvidas. Essa atuação visou orientar o encaminhamento das atividades por meio de questionamentos diretos ao grupo e aos estudantes, incentivando-os a dialogar entre si, elaborar hipóteses, testá-las e verificar se estavam corretas.

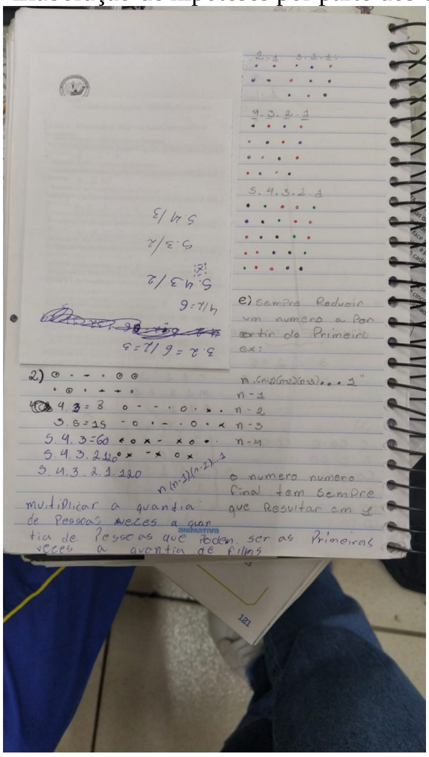
RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir das observações realizadas, foi possível verificar a formulação de hipóteses por meio de diversas representações, destacando-se o uso da tentativa e erro, a observação do comportamento de cada caso citado, a utilização de materiais concretos como referência para o esboço de conjecturas, bem como o desenho de figuras e objetos a partir desses materiais, os quais possibilitaram a visualização de cada situação e sua posterior generalização. Destaca-se

[5] A formalização foi baseada em Matemática: Contexto & Aplicações: Ensino Médio / Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2016.

a Figura II, que apresenta tal esquematização em formato de desenho de “bolinha”, feito com lápis de cor.

Figura II - Elaboração de hipóteses por parte dos estudantes

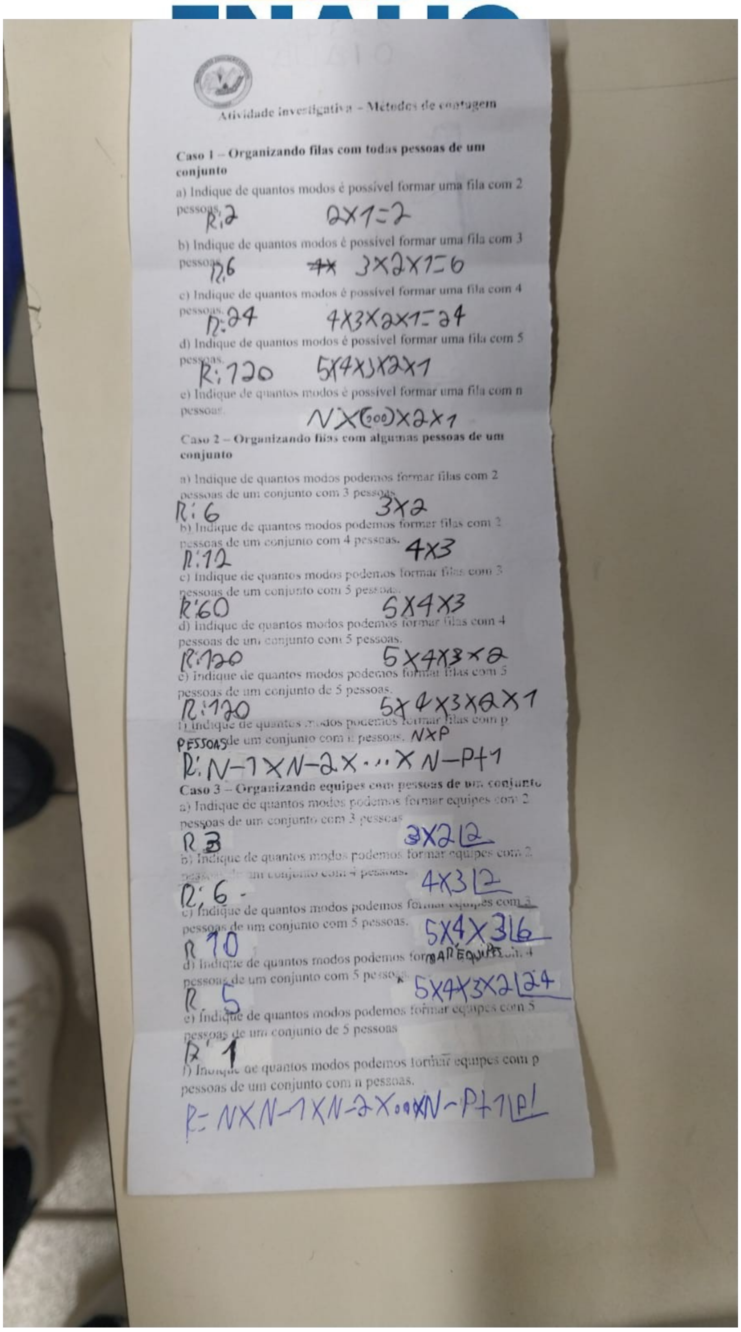


Fonte: Os Autores

Observa-se o uso de diferentes estratégias para a resolução do primeiro caso, referente à Permutação Simples, que, por sua vez, conduz a uma generalização, conforme detalhado pelos alunos na folha de resolução.

Além disso, a Figura III apresenta outra resolução desenvolvida por um grupo distinto, na qual foram elaboradas hipóteses a partir da visualização e padronização de cada caso, destacando-se o Caso 1, relacionado à Permutação Simples, e o Caso 2, referente ao Arranjo Simples.

Figura III - Elaboração de hipóteses por parte dos estudantes


Atividade investigativa – Métodos de contagem

Caso 1 – Organizando filas com todas pessoas de um conjunto

a) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com 2 pessoas.
R: 2   2x1=2

b) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com 3 pessoas.
R: 6   ~~4x~~ 3x2x1=6

c) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com 4 pessoas.
R: 24   4x3x2x1=24

d) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com 5 pessoas.
R: 120   5x4x3x2x1

e) Indique de quantos modos é possível formar uma fila com n pessoas.
NX(...)x2x1

Caso 2 – Organizando filas com algumas pessoas de um conjunto

a) Indique de quantos modos podemos formar filas com 2 pessoas de um conjunto com 3 pessoas.
R: 6   3x2

b) Indique de quantos modos podemos formar filas com 2 pessoas de um conjunto com 4 pessoas.   4x3
R: 12

c) Indique de quantos modos podemos formar filas com 3 pessoas de um conjunto com 5 pessoas.
R: 60   5x4x3

d) Indique de quantos modos podemos formar filas com 4 pessoas de um conjunto com 5 pessoas.
R: 120   5x4x3x2

e) Indique de quantos modos podemos formar filas com 5 pessoas de um conjunto de 5 pessoas.
R: 120   5x4x3x2x1

f) Indique de quantos modos podemos formar filas com p PESSOAS de um conjunto com n pessoas.   NXP
R: N-1XN-2X...XN-P+1

Caso 3 – Organizando equipes com pessoas de um conjunto

a) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 2 pessoas de um conjunto com 3 pessoas.
R 3   3x2|2

b) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 2 pessoas de um conjunto com 4 pessoas.   4x3|2
R: 6

c) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 3 pessoas de um conjunto com 5 pessoas.   5x4x3|6
R 10

d) Indique de quantos modos podemos formar PAR EQUIPE com 4 pessoas de um conjunto com 5 pessoas.   5x4x3x2|24
R 5

e) Indique de quantos modos podemos formar equipes com 5 pessoas de um conjunto de 5 pessoas.
R 1

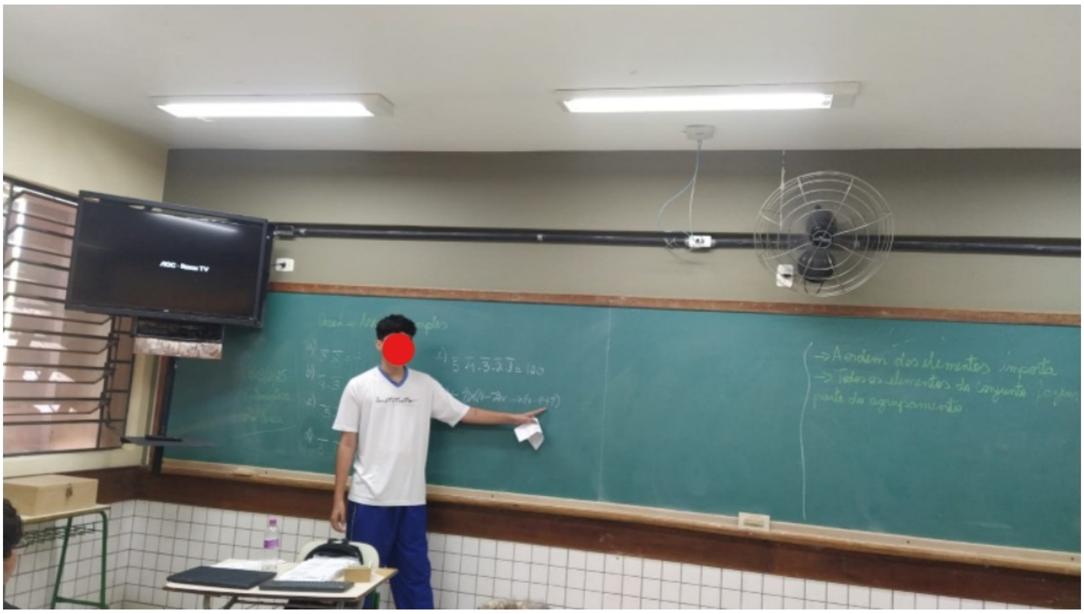
f) Indique de quantos modos podemos formar equipes com p pessoas de um conjunto com n pessoas.
R: NXN-1XN-2X...XN-P+1|P!

Fonte: Os Autores

Em ambos os casos, nota-se o raciocínio lógico aplicado por meio de operações matemáticas para a elaboração e o posterior teste das hipóteses, a fim de verificar sua correção. Destaca-se a tentativa de generalização em ambos os casos, que, embora o conteúdo não tivesse sido previamente abordado, foi realizada pelo grupo com base nos exemplos das questões anteriores. Essa iniciativa evidencia um esforço para a melhoria futura, demonstrando que o uso de atividades anteriores como referência pode servir como elo entre as hipóteses desenvolvidas pelos alunos e sua formalização, possibilitando maior autonomia na construção do conhecimento e do processo ensino-aprendizagem.

A Figura IV ilustra a possibilidade de os grupos apresentarem suas hipóteses e verificações coletivamente, no quadro, para toda a sala. Essa prática ocorreu em todas as turmas acompanhadas, sendo, na maioria, aceita pelos alunos.

Figura IV - Resolução da Proposta da Investigação Matemática por parte de um Aluno



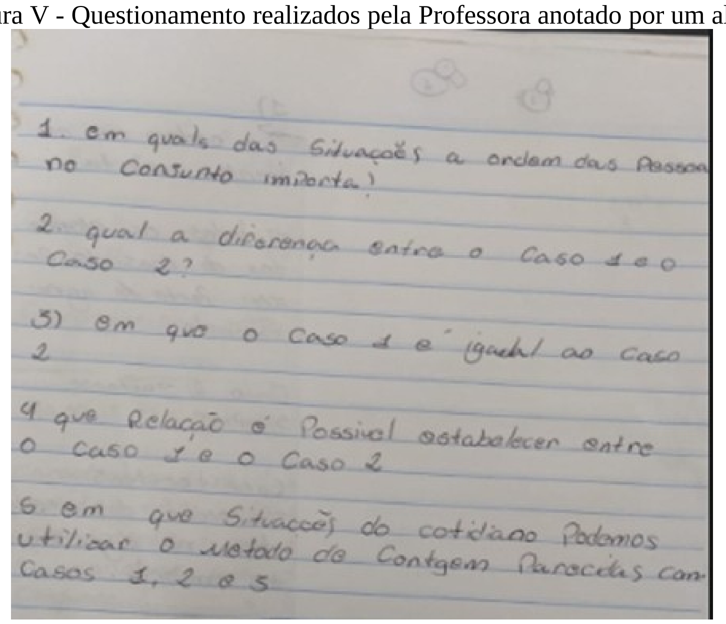
Fonte: Os Autores

Tal prática revela uma ação positiva, conforme apontam Rodrigues, Menezes e Ponte (2018) em estudos semelhantes. O compartilhamento das respostas pelos alunos permite ampla discussão mediada pelo docente e favorece, sobretudo, a autonomia dos estudantes, que conseguem expor aos colegas suas hipóteses, testes e conclusões, diretamente relacionadas às situações propostas pela professora e observadas durante o acompanhamento.

Durante o processo de auxílio à resolução, era indicado aos grupos que interpretassem cada caso por meio de questionamentos direcionados, de modo que pudessem identificar regularidades ao longo da resolução e da formulação de hipóteses. No caso específico de permutação, solicitava-se que os alunos utilizassem os próprios nomes do grupo, favorecendo maior capacidade de abstração. Questionamentos como: “Pensando no primeiro lugar da fila, quantas possibilidades de pessoas temos para colocar? E para o segundo lugar, quantas restaram?” auxiliaram na condução do raciocínio e na organização do pensamento, sem a necessidade de fornecer a resposta diretamente. Esse procedimento dialoga com a perspectiva de Canavarro, Oliveira e Menezes (2014), segundo a qual o professor deve assumir o papel de condutor da aprendizagem, propondo perguntas que incentivem os alunos a refletirem sobre a atividade matemática em desenvolvimento, suas possíveis representações e diferentes caminhos, sem restringi-los a um único modo de solução, evitando limitar o nível de exigência cognitiva.

No processo de formalização, foram realizados questionamentos orais aos alunos, visando observar o desenvolvimento de cada caso e estimular a generalização, objetivo final da análise de cada situação. Os questionamentos foram diversos, e a Figura V apresenta alguns deles, registrados por um dos alunos. Tal registro evidencia que a discussão não se restringiu à mera explanação teórica ou à simples “transmissão” do conhecimento, constituindo-se como oportunidade de construção coletiva, permitindo que os estudantes consolidassem o conhecimento por meio das indagações.

Figura V - Questionamento realizados pela Professora anotado por um aluno


1. em quais das Situações a ordem das Pessoas no Conjunto importa?
2. qual a diferença entre o Caso 1 e o Caso 2?
3) em que o Caso 1 é igual ao caso 2
4 que Relação é Possível estabelecer entre o Caso 1 e o Caso 2
5 em que Situações do cotidiano Podemos utilizar o Metodo de Contagem Parecidos com Casos 1, 2 e 3

Fonte: Os Autores

Diante disso, por meio das observações, anotações e registros fotográficos, compreende-se que a atividade proposta pela professora da escola-campo seguiu encaminhamentos compatíveis com os momentos da Investigação Matemática, conforme discutem Lamonato e Passos (2011) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2015). Embora tais referências não tenham sido explicitamente utilizadas durante a organização ou execução da atividade, verificou-se que os encaminhamentos metodológicos promovidos pela professora consideraram prioritariamente os diferentes momentos de cada etapa, articulando-se às intervenções dos pibidianos que acompanharam a atividade. Isso possibilitou que, em cada fase, os alunos construíssem o conhecimento de forma mais consistente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do que foi apresentado, e com o intuito de relatar as observações realizadas nas atividades referentes à Análise Combinatória, bem como a visualização e compreensão dos processos de desenvolvimento das resoluções elaboradas pelos discentes, entende-se que este relato conseguiu detalhar o processo pelo qual ocorreu tal organização. Isso foi evidenciado por meio de registros em fotografias, anotações elaboradas pelos pibidianos e discussões com a professora da escola-campo, todas relacionadas à Investigação Matemática.

Alinhada a essa perspectiva, a experiência vivenciada no Programa de Iniciação à Docência (PIBID) evidenciou a relevância da participação ativa dos alunos em todas as etapas da atividade. Ao assumirem o papel de construtores do próprio conhecimento, os estudantes demonstraram maior engajamento e autonomia, formulando hipóteses, testando estratégias, como utilizar a si para organizar as filas, conforme relatado, ou perceber que a ordem em um grupo não alterava o resultado, uma vez que o grupo permanecia o mesmo, e identificando padrões que possibilitaram as generalizações desejadas.

A abordagem investigativa utilizada durante o desenvolvimento das atividades, articulada ao uso de situações do cotidiano e à mediação por meio de questionamentos, favoreceu a compreensão dos conceitos e a percepção de que, mais do que aplicar fórmulas prontas, é possível deduzi-las e compreendê-las a partir de princípios básicos previamente conhecidos, como o princípio multiplicativo, situações do dia a dia e problemas contextualizados que favorecem tal compreensão. Ao construir o conceito e as fórmulas com base em saberes já consolidados, e mediante o compartilhamento das ações dos grupos para toda a turma, o conhecimento passou a adquirir maior significado para os estudantes.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. **Práticas de ensino exploratório da Matemática**: Ações e intenções de uma professora. In: PONTE, J. P. Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 217-233, 2014.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. **Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática**: reflexões para o ensino de matemática. Campinas: Zetetiké, v. 19, n. 2, p. 51-74, 2012.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PEDRO. **Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática**: os casos de dois professores. Bolema Boletim de Educação Matemática, v. 32, n. 61, p. 398–418, 2018.

PARANÁ. **Referencial curricular para o ensino médio do Paraná**. Curitiba: SEED-PR, 2021.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de** aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.