A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE VOLUME: CONTRIBUIÇÕES DE UM TCC À LUZ DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Vitória Rodrigues Castro dos Santos [1]
Duelci Aparecido de Freitas Vaz [2]

RESUMO

O presente artigo deriva de um trabalho de conclusão de curso em licenciatura em matemática e tem como objetivo apresentar as principais ideias de uma proposta para a construção do conceito de volume sob a perspectiva do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov, em articulação com os princípios da teoria histórico-cultural de Vygotsky e da teoria da atividade de Leontiev. Partindo do pressuposto de que o ensino escolar deve promover o desenvolvimento do pensamento teórico e a formação de conceitos científicos, o presente trabalho apresenta uma proposta que busca conduzir os estudantes em um percurso formativo que vai da percepção empírica da ocupação do espaço à construção teórica do conceito de volume, compreendido como uma relação entre a área da base e a altura de um sólido. Essa relação é tratada como núcleo conceitual do volume, a partir do qual se torna possível deduzir, de forma fundamentada, as diferentes fórmulas aplicáveis aos sólidos geométricos. A metodologia foi elaborada em forma de sequência didática fundamentada na atividade de estudo, envolvendo análise, modelação e abstração a partir de uma situação real, com uso de representações visuais no GeoGebra. Embora ainda não tenha sido aplicada, é analisada teoricamente quanto à sua coerência com a teoria do ensino desenvolvimental e seu potencial pedagógico.

Palavras-chave: Volume, Núcleo conceitual, Ensino desenvolvimental, GeoGebra, TCC.

INTRODUÇÃO

Nos contextos escolares, o ensino da matemática, especialmente no campo da geometria, é frequentemente desenvolvido por meio da apresentação de fórmulas e procedimentos voltados à resolução de problemas. Essa abordagem, que tem sua relevância no cotidiano das práticas pedagógicas, tende, por vezes, a priorizar a aplicação de regras e técnicas em detrimento da compreensão dos fundamentos conceituais que estruturam esse conhecimento. Um exemplo disso pode ser observado no ensino do volume, que, não

[1] Graduanda do Curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC GO, vitoriarodriguescass@gmail.com;

[2] Professor orientador: Graduado pelo Curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Goiás de Goiás – PUC GO, Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – UFG e Doutor pela Universidade Estadual Paulista, duelci.vaz@gmail.com.

raramente, é introduzido aos estudantes por meio de expressões prontas, sem que se explorem as relações espaciais e os princípios que as originam. Embora esse modo de ensinar possa contribuir para a aprendizagem de procedimentos operatórios importantes, ele pode não favorecer de forma suficiente o desenvolvimento do pensamento teórico, entendido como a capacidade de compreender o movimento interno dos conceitos, suas origens e suas articulações lógicas.

Na perspectiva do ensino desenvolvimental proposto por Davydov, a formação de conceitos não deve ocorrer pela via da memorização de definições ou pelo acúmulo de exemplos, mas por meio de atividades que favoreçam a apropriação consciente dos nexos internos do objeto de estudo. Isso implica considerar o movimento lógico-histórico do conceito, ou seja, compreender como ele surgiu social e historicamente e como pode ser reconstruído no percurso formativo dos estudantes. No caso do volume, trata-se levar o estudante a compreender seu conceito aos poucos, começando pela percepção simples de que os objetos ocupam espaço, até chegar à ideia mais elaborada de que o volume pode ser calculado multiplicando a área da base pela altura, relação essa que se apresenta como núcleo conceitual capaz de gerar as fórmulas conhecidas.

Para Davydov, formar o pensamento teórico não é apenas decorar informações ou repetir definições, é um processo de compreensão mais profundo, no qual o estudante precisa descobrir a essência, a origem e como se deu o desenvolvimento histórico de um determinado conhecimento. Em outras palavras, não basta saber "o que é", é preciso entender "como surgiu, por que é assim e como se transformou" ao longo do tempo. Quando o aluno se apropria do processo de formação histórica de um saber (por exemplo, como o conceito de volume foi sendo construído ao longo da história da ciência), ele não aprende só o conteúdo, mas também absorve os modos de pensar que estão por trás daquele conteúdo, ou seja, compreende os métodos e estratégias cognitivas usados para construir aquele conhecimento.

Libâneo apresenta uma síntese do processo de formação do pensamento teórico no contexto do ensino, com base na teoria de Davydov:

> Trata-se, inicialmente, por meio da análise do conteúdo a ser aprendido, de ajudar os alunos a buscarem a determinação primeira de seu aspecto mais geral, as relações gerais básicas, o princípio geral que caracteriza o conteúdo. Em seguida, eles vão verificando como essas relações gerais se manifestam em outras relações particulares, seguindo o caminho da abstração à generalização. (LIBÂNEO, 2016, p. 360)

A teoria do ensino desenvolvimental está fundamentada na teoria histórico-cultural de Vygotsky, a qual entende que o desenvolvimento do cognitivo humano não acontece apenas mediante o amadurecimento biológico, mas também é fruto das interações socioculturais decorrentes das trocas do sujeito com o mundo, ou seja, ele emerge também da vida cultural (Rego, 1995). Davydov retoma esses princípios ao propor um ensino que não parte de um conteúdo pronto e acabado, mas sim da análise de situações que levam os alunos a participarem desse processo, a descobrirem e construírem os conceitos ativamente. Além disso, a teoria do ensino desenvolvimental também se articula com a teoria da atividade de Leontiev, que compreende o aprendizado como um processo dinâmico, que é orientado por motivos, necessidades, objetivos e realizado por meio de ações e atividades. Então, o processo de ensino-aprendizagem não é visto como uma simples transmissão de informações, de conteúdos, mas como uma atividade intencional de estudo, em que o aluno se envolve na construção do seu conhecimento.

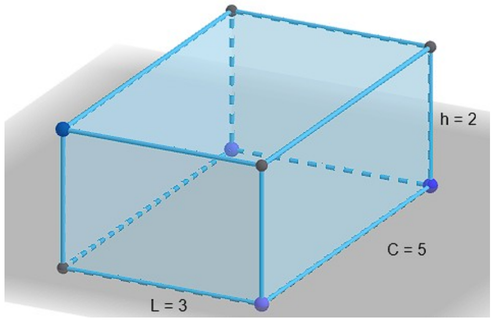
Nesse sentido, este trabalho se justifica pela necessidade de buscar outras formas de ensinar matemática que não se limitem à transmissão de fórmulas prontas, mas que coloquem os alunos em uma atividade de estudo, na qual possam pensar, investigar e compreender os conceitos de forma mais consciente e orientada para o desenvolvimento do pensamento teórico. O objetivo central é analisar o movimento lógico-histórico da formação do conceito de volume e, a partir disso, elaborar uma proposta de ensino que tenha como foco mostrar como o núcleo conceitual do volume pode ser generalizado para diferentes sólidos. Parte-se de uma situação real, da qual se desenvolvem ações de análise, modelação e abstração, conduzindo à identificação do núcleo conceitual e à sua generalização, com o apoio de representações visuais construídas no software GeoGebra.

É esperado que os resultados desta proposta possam mostrar o potencial do ensino desenvolvimental na formação de conceitos matemáticos, de modo que os professores possam se apropriar da metodologia proposta e adaptá-la às especificidades de suas realidades escolares. Com isso, busca-se possibilitar que os estudantes avancem para além da aplicação de fórmulas, desenvolvendo a compreensão dos fundamentos conceituais que lhes dão origem.

METODOLOGIA

O ponto de partida será um problema real que mobiliza a necessidade de se compreender o conceito de volume e tem a função de iniciar o processo investigativo, permitindo aos alunos identificarem, por meio da análise da situação, os elementos essenciais do conteúdo a ser estudado. A situação-problema que servirá como ponto de partida para o desenvolvimento do conceito é: *“Quantos litros de água são necessários para encher completamente uma piscina retangular com 5 metros de comprimento, 3 metros de largura e 2 metros de profundidade?"*

Figura 1 - Representação gráfica de um paralelepípedo retângulo que simboliza a piscina mencionada.

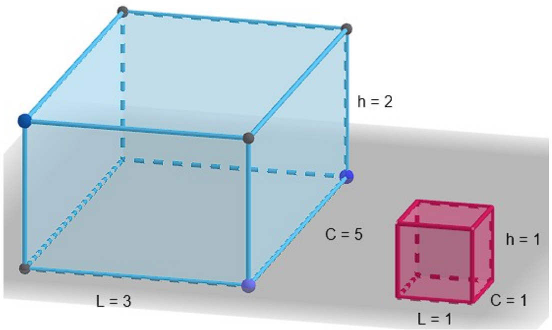


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Esse problema envolve uma situação concreta e próxima da realidade dos estudantes, o que pode mobilizar os motivos e dar sentido à aprendizagem. No entanto, para resolvê-lo de maneira fundamentada, é preciso compreender o que significa “medir um volume” e qual é a unidade básica utilizada nesse tipo de medição. Vale ressaltar que, nesse caso, foram utilizadas unidades inteiras, pois isso facilita o entendimento inicial do conceito, e que esse exemplo servirá apenas como ponto de partida para a identificação do núcleo conceitual, não para resolução imediata e tratamento com as unidades de medida. Embora o enunciado utilize a unidade de medida “litros”, que é bastante familiar aos estudantes, essa escolha tem apenas o objetivo de situar a problemática em um contexto cotidiano. Ao longo do trabalho, a proposta se concentra na construção conceitual do volume, sem abordar diretamente a conversão entre unidades. A relação entre o litro e o decímetro cúbico (1 L = 1 dm³) e as outras unidades de medida, embora relevante, é tratada apenas como uma sugestão de desdobramento possível da proposta, mencionada nas discussões finais, e não faz parte do percurso investigativo desenvolvido neste trabalho.

Diante da situação-problema proposta, a resolução imediata com o uso de fórmulas pode não ser viável aos estudantes caso eles ainda não tenham sido apresentados ao conceito formal de volume. Então, para conseguir solucionar o problema, é preciso que os estudantes compreendam primeiro o que significa medir o volume de um corpo tridimensional. Para isso, cabe ao professor conduzir os alunos à identificação de uma unidade de preenchimento tridimensional, como o cubo unitário, que funcione como ponto de partida para a construção do conceito e para a identificação do núcleo conceitual.

Figura 2 - Representação gráfica do paralelepípedo retângulo e um cubo unitário.

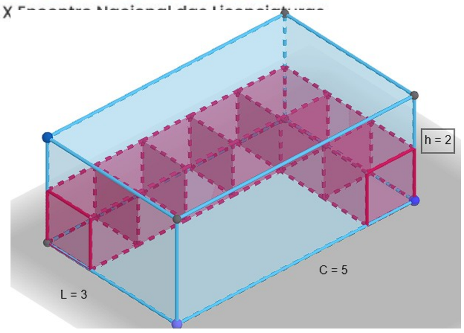


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Essa unidade, representada acima por um cubo cujas arestas medem uma unidade de comprimento (1x1x1), será o ponto de partida da investigação do conceito, ou seja, é a partir da compreensão desse elemento que será possível generalizar a ideia de volume para diferentes objetos e situações.

Com o auxílio do GeoGebra, é possível visualizar esse cubo unitário e ilustrar como ele pode ser utilizado para "preencher" o espaço interno da piscina apresentada no problema inicial. Essa visualização permite que os alunos percebam o volume como a medida da quantidade de unidades cúbicas necessárias para preencher completamente o interior de um objeto tridimensional. Na representação gráfica abaixo, o paralelepípedo não está completamente preenchido pelos cubos unitários, mas, seguindo essa ideia, é possível imaginar o processo de preenchimento total como uma contagem sistemática dessas unidades, o que conduz à compreensão da fórmula para o cálculo do volume desse paralelepípedo.

Figura 3 - Paralelepípedo preenchido parcialmente com cubos unitários.

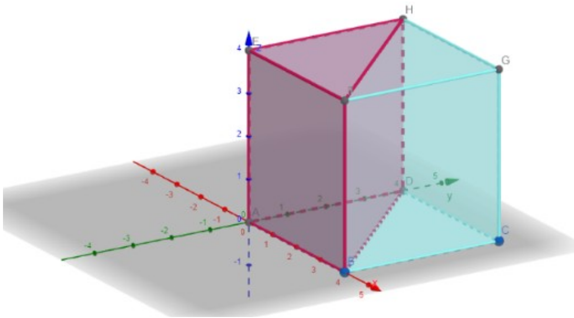


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Ao observar a piscina como uma grande caixa retangular, os estudantes podem investigar quantos cubos de 1 unidade de aresta cabem ao longo do comprimento, da largura e da profundidade. Essa contagem, inicialmente feita de forma concreta e visual, permite que eles percebam a ideia de volume como resultado do preenchimento completo de um espaço tridimensional e, a partir dessa experimentação, deduzam e generalizem a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo: $V = C \times L \times h$, onde C representa o comprimento, L a largura e h a altura (ou profundidade). Essa expressão também pode ser interpretada como a área da base multiplicada pela altura, já que a base do paralelepípedo reto é um retângulo cuja área é dada por $Ab = C \times L$, logo, seu o volume é: $V = Ab \times h$

Dando continuidade ao processo de construção conceitual por vínculos dedutivos, é possível avançar na generalização da fórmula do volume. Uma das possibilidades é partir de um cubo e, a partir dele, construir uma nova figura por meio da divisão da base em dois triângulos congruentes.

Figura 4 - Representação tridimensional de um cubo decomposto em dois prismas de base triangular.



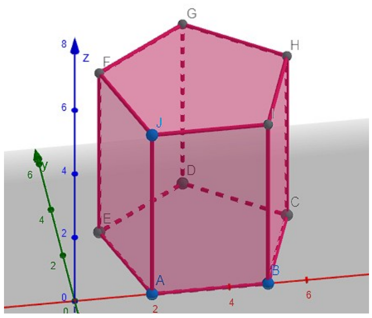
Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Cada um desses prismas tem como base um dos triângulos formados pela diagonal e conserva a altura do cubo. Assim, a área da base de cada prisma é metade da área da base do cubo, e o volume de cada um é calculado multiplicando a área da base triangular pela altura. Essa representação mostra que o volume do prisma pode ser obtido pela multiplicação da área da base triangular pela altura do prisma. Sabendo que a área da base é $Ab=\frac{B\times h}{2}$, o volume do prisma será dado por: $V=\frac{B\times h}{2}\times H$, onde B representa a base do triângulo, h é a altura do triângulo e H é a altura do prisma.

A construção e a análise do prisma de base triangular, obtido a partir da divisão do cubo, permite que os estudantes percebam que o volume do sólido resulta do produto entre a área da base e a altura. Esse princípio, visualizado e compreendido em um caso específico, pode ser estendido a todos os prismas. Isso quer dizer que, as bases podem ter diferentes formatos (triangulares, quadrangulares, pentagonais etc.) mas a lógica que rege o cálculo de seu volume permanece a mesma: preencher o espaço tridimensional com "camadas" da base, empilhadas ao longo da altura. Essa estrutura dá origem a fórmula do volume para qualquer prisma.

Para ilustrar essa generalização, considera-se agora um prisma cuja base seja um pentágono, ou seja, um polígono de 5 lados.

Figura 5 - Representação tridimensional de um prisma de base pentagonal.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

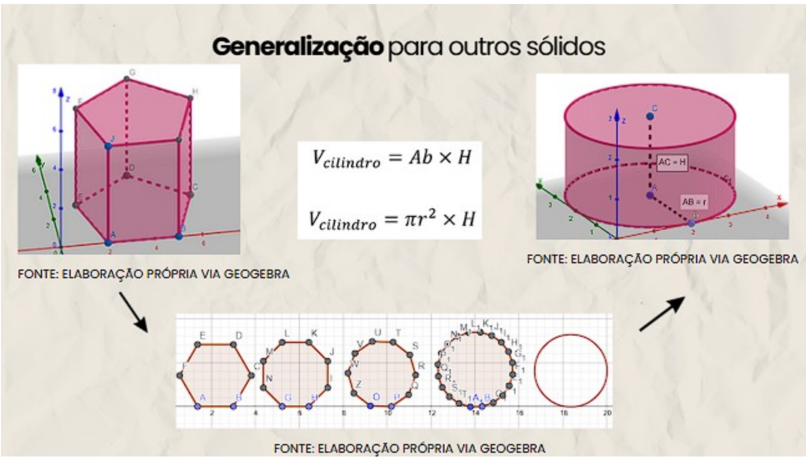
A ideia de generalização se justifica pela possibilidade de dividir a base do prisma em triângulos. Cada polígono que constitui a base de um prisma pode ser decomposto em um conjunto de triângulos cujas áreas podem ser calculadas individualmente e, ao somar as áreas desses triângulos, obtém-se a área total da base do prisma. Como a altura do prisma permanece constante em toda sua extensão, o volume pode ser calculado multiplicando essa área total pela altura. A imagem a seguir ilustra como a base pentagonal pode ser dividida em cinco triângulos isósceles, já que o pentágono é regular. Também é possível decompor a base em três triângulos, a depender do método de triangulação escolhido e das informações disponíveis.

Cada um desses triângulos tem sua área calculada pela fórmula $A=\frac{B\times h}{2}$. Ao somar as áreas dos cinco triângulos $Ab=A1+A2+A3+A4+A5$, obtém-se a área total da base do prisma pentagonal, denotada por Ab. Ao multiplicar essa área total pela altura H do prisma, chega-se ao volume do sólido. No caso de uma base regular, como os cinco triângulos são congruentes, essa área total também pode ser expressa como cinco vezes a área de um único triângulo, o que simplifica o cálculo.

Assim, independentemente do número de lados do polígono que forma a base de um prisma ou da forma como ela é decomposta, o volume de qualquer prisma sempre será dado pelo produto entre a área da base Ab e a altura H, o que pode ser expresso pela fórmula: $V_{prisma}=Ab\times H$.

Mas o que acontece quando a base de um prisma é formada por um polígono que aumenta indefinidamente o número de lados? À medida que esse número cresce, as arestas da base vão se tornando cada vez menores e, no limite desse processo, a base poligonal se transforma em um círculo. Logo, o sólido resultante deixa de ser um prisma e passa a ser um cilindro.

Figura 6 – Transformação de um prisma em um cilindro conforme o número de arestas da base aumenta indefinidamente.

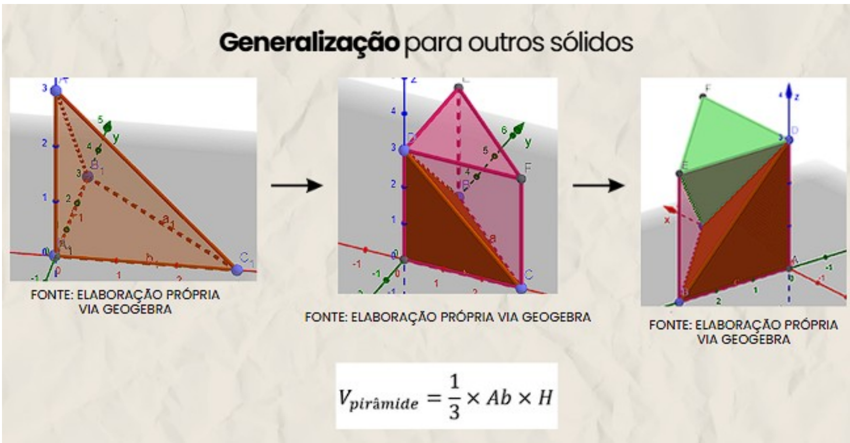


Elaboração própria via GeoGebra

Apesar da mudança no formato da base, o princípio para o cálculo do volume continua sendo o produto entre a área da base e a altura. Nesse caso, como a base é um círculo, sua área é calculada por $Ab = \pi r^2$, em que r representa o raio da circunferência. Dessa forma, a fórmula do volume do cilindro é expressa por: $V_{cilindro} = Ab \times H$

Após a generalização da fórmula do volume para prismas com diferentes tipos de base, ainda se pode avançar na construção conceitual e dar início à dedução do volume da pirâmide. Ao imaginar um prisma qualquer, com base e altura fixas, é possível visualizar que dentro desse prisma cabem exatamente três pirâmides congruentes, ou seja, com mesma base e mesma altura. Essa divisão permite compreender que cada pirâmide ocupa um terço do volume do prisma correspondente. Assim, deduz-se que o volume da pirâmide pode ser calculado pela expressão: $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times Ab \times H$.

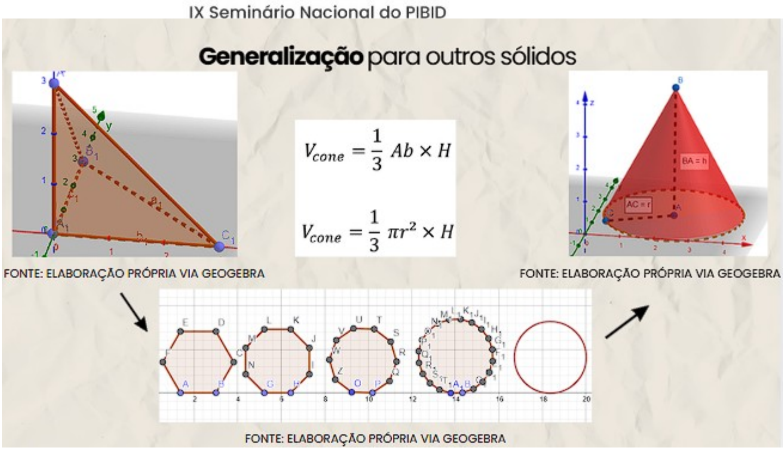
Figura 7 - Visualização das três pirâmides contidas dentro de um prisma.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, considera-se agora uma pirâmide cuja base é um polígono regular com um número de lados cada vez maior, assim como foi mostra a figura 8. À medida que esse número cresce, a forma da base se aproxima de um círculo e, no limite, a pirâmide se transforma em um cone.

Figura 8 - Transformação de uma pirâmide em um cone conforme o número de arestas da base aumenta indefinidamente.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

O cone, assim como a pirâmide, é um sólido que converge para um único vértice, e seu volume também representa um terço do volume do cilindro que possui a mesma base e altura. A base do cone é um círculo de raio r, cuja área é dada por $Ab=\pi r^2$. A altura H é a distância do vértice até o plano da base. Dessa forma, o volume do cone pode ser determinado pela seguinte fórmula: $V_{cone}=\frac{1}{3}\pi r^2 \times H$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A proposta descrita neste artigo tem origem em um trabalho de conclusão de curso e foi reelaborada e sintetizada com a intenção de compartilhar reflexões e práticas que possam contribuir com outros professores, além ampliar sua visibilidade e torná-la mais acessível. Embora o conteúdo aqui apresentado esteja em forma sintetizada, o trabalho original contém uma abordagem mais detalhada, com registros completos de cada etapa e com a dedução de outras fórmulas para o cálculo de volume, a partir do núcleo conceitual estabelecido.

Mais do que relatar uma experiência, este artigo busca destacar a importância de abordar o conceito de volume a partir de sua estrutura lógica. Por mais que não sejam apresentadas fórmulas de imediato, tratar o conteúdo valorizando a construção do conceito permite que os alunos compreendam o volume a partir de suas bases. Ao focar no significado do que é medir e no que está sendo medido, ou seja, na quantidade de espaço ocupado, os estudantes têm a oportunidade de entender o conceito antes de associá-lo a qualquer expressão algébrica. Então mais do que ensinar uma fórmula, esta forma de apresentar o conteúdo permite que os alunos criem caminhos para a compreensão verdadeira do conceito em estudo. A maneira como as fórmulas foram construídas ao longo do trabalho mostrou como a dedução, o pensamento criativo e a lógica são importantes na matemática. Essa forma de raciocinar, baseada em relações dedutivas, foi fundamental em diversas descobertas matemáticas desde a Antiguidade e continua sendo essencial na matemática até hoje. Ensinar por meio desses vínculos lógicos e conceituais contribui não apenas para a compreensão dos conteúdos, mas também para o desenvolvimento da capacidade de pensar com fundamentação.

Ainda que o foco deste trabalho tenha sido mostrar como pode ocorrer a construção do conceito e sua generalização a partir do núcleo conceitual, fica como sugestão aprofundar a apresentação da importância desse conteúdo e seu papel ao longo da história da humanidade, considerando os diversos campos em que ele é aplicado. Compreender o conceito de volume vai além de saber aplicar fórmulas, é entender uma ideia que surgiu a partir da necessidade humana de medir e organizar o espaço ao seu redor. Historicamente, o volume passou a ser estudado para resolver problemas práticos, como armazenar alimentos, construir casas, medir líquidos, transportar mercadorias etc. Essa busca por soluções levou à criação de unidades de medida e ao desenvolvimento de fórmulas matemáticas que facilitam, até hoje, o cálculo do espaço ocupado por diferentes objetos. Recorrer à história nesse momento, relacionando o objeto de estudo ao contexto sociocultural em que foi desenvolvido, remete aos princípios da teoria histórico-cultural, que compreende o desenvolvimento do pensamento humano como vinculado às condições sociais, culturais e históricas em que os sujeitos vivem e aprendem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo analisar a construção do conceito de volume na perspectiva do ensino desenvolvimental proposto por Davydov, elaborando uma proposta didática voltada à formação do pensamento teórico por meio da atividade de estudo. Ao longo do trabalho, foi mostrado como o movimento lógico-histórico dos conceitos pode orientar a organização do ensino, permitindo que os estudantes construam os conhecimentos matemáticos de forma consciente, com base em generalizações e deduções lógicas, aspectos fundamentais para a matemática. Dessa forma, esta pesquisa apontou caminhos para que o ensino de volume vá além da memorização de fórmulas e propôs uma forma de trabalho que valoriza o raciocínio e o desenvolvimento do pensamento teórico.

Como sugestão para pesquisas futuras, é importante acompanhar a aplicação dessa proposta em contextos escolares, observando como os alunos respondem ao processo de construção do conceito de volume. Além disso, recomenda-se a inclusão de atividades práticas e experimentais, como o uso de recipientes para explorar a relação entre volume e capacidade, ou a construção de sólidos geométricos com materiais simples, que tornem o conceito mais concreto e próximo da realidade dos estudantes. Trabalhar a conexão entre as formas geométricas e as unidades de medida, especialmente nas conversões entre volume e capacidade, abre caminho para que os alunos compreendam melhor as situações do dia a dia que envolvem esses conceitos e consigam aplicar esse conhecimento dentro e fora da escola.

Por fim, este trabalho reforça a ideia de que teoria e prática não são opostas, mas complementares. A teoria oferece fundamentos para que a prática seja mais consciente, enquanto a prática dá vida e sentido ao que foi estudado teoricamente. Nesse movimento, os alunos são incentivados a buscar os porquês dos conceitos, a compreender suas raízes e relações. Assim, o processo de ensino-aprendizagem deixa de ser uma simples repetição de procedimentos e passa a consolidar a construção de conceitos científicos, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de analisar, generalizar e se apropriar dos conceitos para agirem sobre o mundo.

REFERÊNCIAS

LIBÂNEO, José Carlos. **A teoria do ensino para o desenvolvimento humano e o planejamento de ensino**. Educativa, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 353-387, maio/ago. 2016.

REGO, Teresa Cristina. Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995. (Educação e conhecimento).

RIOS, Camila Fernanda Moro; ROSSLER, João Henrique. **Atividade principal e periodização do desenvolvimento psíquico: contribuições da psicologia histórico-cultural para os processos educacionais**. Perspectivas en Psicología, Uberlândia, MG, v. 14, n. 2, p. 30-41, dez. 2017.