



# O INVARIANTE DA REPETIÇÃO NOS PROBLEMAS COMBINATÓRIOS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

José Jefferson da Silva

*Universidade Federal de Pernambuco, email: [jef3ferson@hotmail.com](mailto:jef3ferson@hotmail.com)*

Cristiane de Arimatéa Rocha

*Universidade Federal de Pernambuco, email: [tiane\\_rocha@yahoo.com.br](mailto:tiane_rocha@yahoo.com.br)*

## RESUMO

Este estudo é um recorte de um Trabalho de Conclusão de Curso Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática de Silva (2015) que objetivou identificar as propriedades invariantes apresentadas em problemas combinatórios contidos em duas coleções de livros didáticos e manuais dos professores aprovados no Programa Nacional do Livro Didático 2014 dos Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). As coleções escolhidas foram a mais adotada e a menos adotada no país. Na análise dos resultados, percebemos que o conteúdo é geralmente introduzido através de questões resolvidas, e na orientação para os professores não orienta, em momento algum, a diferença entre as situações e suas respectivas propriedades invariantes, enquanto nas questões há uma preferência entre as questões que não utilizem a repetição.

**Palavras chave:** Raciocínio Combinatório; Propriedades Invariantes; Livro Didático; Anos Finais.

## INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um recorte das discussões e dos resultados obtidos numa pesquisa de Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática – Análise dos Problemas Combinatórios em Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino



Fundamental de Silva (2015), mais especificamente de analisar os indícios das orientações ou questões que possibilitem a discussão das propriedades invariantes da combinatória, presente em coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental.

O Ensino de Combinatória na Educação Básica tem suas primeiras orientações nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) dos anos finais Ensino Fundamental, no qual se justifica que um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar aos conteúdos de matemática, “aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória.” (BRASIL, 1998, p. 49).

O PCN de Matemática dos anos iniciais indica ainda que “relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.” (BRASIL, 1997, p.40). Assim sendo, fica nítida a orientação para o professor de matemática apresentar questões que envolvam o raciocínio combinatório.

Mas será que os professores dos anos finais do ensino fundamental têm disponíveis questões que levem o aluno a refletir sobre as situações-problema de combinatória?

Para melhor entender esta problemática, e tendo em vista que uma das principais fontes de pesquisa de um professor é o livro didático, faz-se necessário uma análise das questões e problemas propostos pelos mesmos.

Para essa análise foi selecionada a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud que defende que um conceito não pode ser reduzido à sua definição quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino, sendo necessário incluir/discutir as três dimensões envolvidas no processo de ensino-aprendizagem – situações,



propriedades invariantes e representações simbólicas.

## **TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS**

A teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, nomeadamente daquelas que revelam das ciências e das técnicas. (VERGNAUD, 1991, p. 155)

Segundo esta teoria, “um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino” (idem, p. 156).

No ambiente da Teoria dos Campos Conceituais, há três dimensões do conhecimento, de forma descrita abaixo:

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);  
I: conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (significado);  
R: conjunto de representações simbólicas, utilizadas tanto para representações quanto para resolução do problema (significante).  
(VERGNAUD, 1991, pág. 166)

Assim, na Teoria dos Campos Conceituais, um conceito depende das três dimensões do conhecimento (S, I, R) que são atrelados.

Desta forma podemos afirmar que para Vergnaud, “Campo Conceitual é um conceito informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição” (CARVALHO, 2011, p. 48 apud MOREIRA, 2002).



## A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E A COMBINATÓRIA

Conforme descrito na secção anterior, o conceito, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, é formado pelas situações, pelos invariantes e pelas representações envolvidas, que são conectadas. Assim faz-se necessário apresentar as três dimensões no ensino-aprendizagem da combinatória.

Quanto às situações, Pessoa e Borba (2009) classificam os problemas combinatórios em quatro tipos, são eles: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação.

Barreto e Borba (2011) detalham que:

O problema que envolve o *produto cartesiano* é composto, no mínimo, por dois conjuntos básicos, sendo necessário, combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro para formar o conjunto-solução. A operação com problemas que envolvem o *arranjo*, a *permutação* e a *combinação*, consiste basicamente, em formar subconjuntos, a partir de um conjunto, atendendo a determinadas condições peculiares a cada um desses significados (com todos os elementos – no caso da *permutação* – ou com alguns dos elementos – nos casos do *arranjo* e da *combinação* e levando em consideração se a ordem dos elementos gera, ou não, novas possibilidades). Portanto, nesses casos, o *raciocínio combinatório* se desenvolverá na organização dos elementos de um conjunto básico, diferente do *produto cartesiano* que envolve a associação entre dois ou mais conjuntos básicos. (p. 02)

Sabemos ainda que cada tipo de problema descrito possuem propriedades invariantes que os caracterizam. Pessoa e Borba (2009) organizam tais informações no quadro abaixo.

Produto Cartesiano: (1) dois (ou mais conjuntos) diferentes serão combinados para construir um novo grupo; (2) a ordem dos elementos escolhidos não formará um novo grupo.

Combinação: (1) de um conjunto maior serão selecionados objetos ou situações que constituirão os subgrupos; (2) a ordem dos objetos escolhidos

não gerará novas possibilidades.

Arranjo: (1) um grupo maior gerará novas possibilidades ao subgrupo e não são utilizados todos os elementos do grupo maior; (2) a ordem e a escolha dos elementos geram novas possibilidades.

Permutação: (1) todos os elementos são utilizados, cada um, apenas uma vez; (2) A ordem dos elementos do conjunto gera novas possibilidades.

Desta forma, percebemos que em todas as situações descritas existem duas propriedades invariantes: uma definida pela forma de *escolha* dos elementos e outra que se refere a *ordem* dos elementos gerarem (ou não) novas possibilidades.

Além destas propriedades invariantes, outra propriedade que pode aumentar a quantidade de possibilidades é a invariante da repetição, que pode ser considerada ou não dependendo do problema a ser resolvido. Por exemplo, ao pensar senhas compostas por três letras utilizando as letras {A, B, O}, podemos ter {ABO; AOB; BAO; BOA; OAB; OBA}, se não considerarmos as repetições de letras, ou {AAA; AAB; AAO; ABA; ABB; ABO; AOA; AOB; AOO; BAA; BAB; BAO; BBA; BBB; BBO; BOA; BOB; BOO; OAA; OAB; OAO; OBA; OBB; OBO; OOA; OOB; OOO}, se considerarmos as possibilidades que repetem as letras. Notemos que ao considerar as repetições, aumentamos consideravelmente as possibilidades, e desta forma pode mudar as estratégias de resolução das mesmas, assim deve ser considerada na análise das questões propostas.

Abaixo segue exemplos de questões que consideravam a repetição e questões que não considerava as repetições, encontradas nos livros didáticos estudados.

33. Uma sorveteria vende sorvetes de 3 sabores diferentes: chocolate, morango e coco.



- a) Faça no seu caderno uma tabela que mostre todos os tipos de sorvete de 2 bolas que podem ser montados nessa sorveteria.  
b) Quantos são estes tipos?

Figura I: Exemplo onde é considerado a repetição de elementos  
Fonte: LD-1, 6º ano, pág. 28

61. (Saresp) Usando os algarismo 1, 2 e 3, sem repetir nenhum, é possível formar:  
a) dois números de três algarismos.  
b) três números de três algarismos.  
c) quatro números de três algarismos.  
d) seis números de três algarismos.

Figura II: Exemplo onde não é considerado a repetição de elementos  
Fonte: LD-1, 6º ano, pág. 24

Portanto, o invariante da repetição nos problemas combinatórios pode ser discutido nos últimos anos do ensino fundamental, considerando que existe um aumento do número total de possibilidades, o que pode dificultar no esgotamento de possibilidades quando utilizado representações que sugerem a enumeração.

## METODOLOGIA

Para o desenvolvimento desta pesquisa proposta foi escolhido duas coleções entre as dez aprovadas pelo PNLD-2014.

Como buscamos *identificar a presença de questões ou reflexões que explicitem as propriedades invariantes nas coleções de livros dos anos finais do PNLD-2014*, escolhemos inicialmente a coleção mais adotada no país, e a coleção menos adotada.

Segundo dados do FNDE, disponibilizados através do documento, Coleções mais distribuídas por componente curricular (BRASIL, 2013), a coleção mais adotada teve 2.831.411 exemplares distribuídos, enquanto a menos adotada teve 270.860



exemplares. Ambos os dados é dado a partir da soma dos livros de 6º ao 9º ano, assim como os manuais dos professores dos respectivos anos do ensino fundamental.

Em seguida foi realizada uma pesquisa quali-quantitativa. Iniciando por uma verificação quantitativa das questões que sugerem o uso do raciocínio combinatório, assim como classificando quanto à presença da invariante de repetição. Continuando com uma análise qualitativa das orientações dadas aos professores, através dos respectivos manuais dos professores, buscando orientações sobre as propriedades invariantes de tais situações.

As coleções de Livros Didáticos foram codificadas e identificadas, por siglas, compostas de letras e números. A coleção menos adotada no país foi identificada como LD-1. Enquanto a coleção mais adotada no país foi identificada como LD-2.

Por fim, salientamos que para o processamento de todos os dados quantitativos foi utilizado o programa IBM SPSS Statistics, este software é uma coleção de produtos que aborda todo o processo analítico, desde o planejamento até a coleta de dados para análise, relatórios e implantação.

De modo geral, o IBM SPSS Statistics permite a análise de variáveis de forma simples e rápida, podendo-se cruzar variáveis e gerar, tabelas, gráficos, dados estatísticos, como a covariância, entre outros.

## **DISCUSSÃO E RESULTADOS**

As questões catalogadas foram classificadas quanto à presença da variável repetições. Como discutimos anteriormente a presença dos casos que solicitam a repetição de elementos aumenta consideravelmente o quantitativo geral de casos, podendo vir a ser um dos elementos que dificultam a listagem de todas as possibilidades. Os resultados obtidos encontram-se no gráfico abaixo:

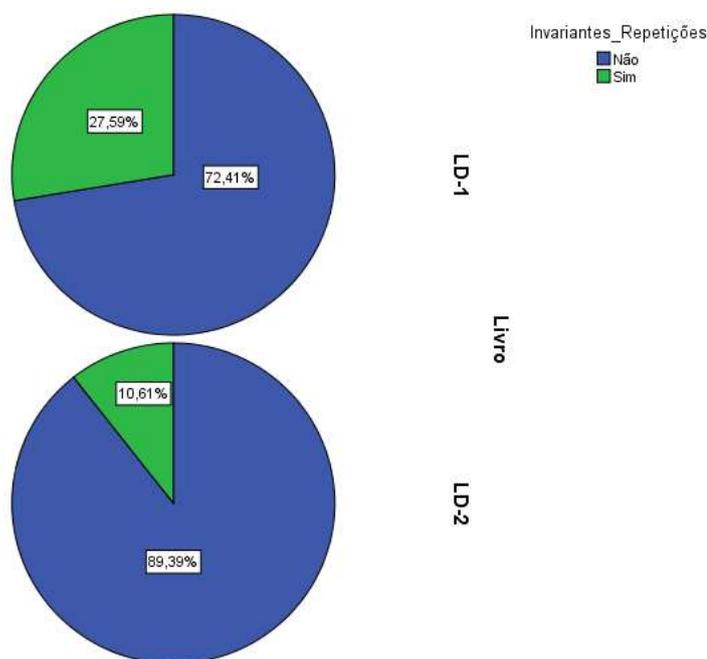


Gráfico 1: Distribuição da variável repetições por coleção de livro

De acordo com a análise, percebe-se que na coleção LD-1, 27,59% das questões solicitam a repetição, enquanto 72,41% não solicitam. Em LD-2, 10,61% das questões utilizam a repetição, enquanto 89,39% não.

Infer-se então que ambas as coleções valorizam mais as questões não utilizam a repetição, devido à dificuldade adicional que as questões que utilizam repetição acrescentam. Apesar disto, a existência de questões com repetições mostra a necessidade que os autores veem de aos poucos irem inserindo as questões mais complexas, fazendo os alunos refletirem sobre os casos onde elas fazem sentido.

Quanto à disposição de tais questões por volume, podemos observar através do gráfico abaixo.

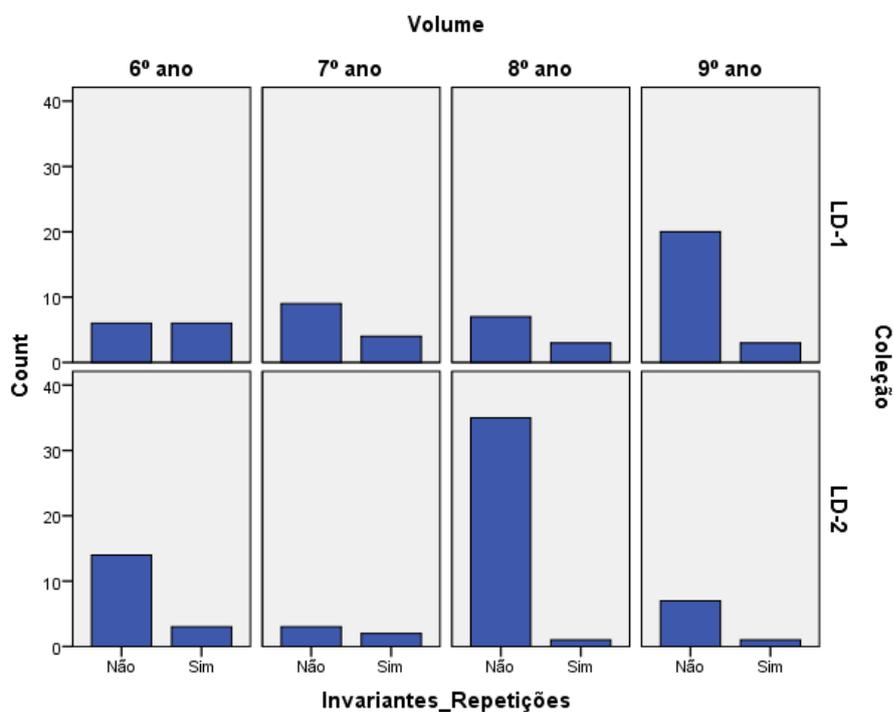


Gráfico 2: Invariante Repetições distribuídas por Volume da Coleção de Livro

Percebemos que na maioria dos volumes das coleções as questões não apresentam a repetição, porém no volume do 6º ano do LD-1 o número de questões é equivalente. Além disso, percebemos que os autores do LD-1 apresentou mais questões com a invariante repetição em todos os volumes, do que o autor da coleção LD-2.

Desta forma, percebe-se que a escolha de ambos os autores são adequadas para a modalidade de ensino, além disto, a inserção de algumas questões com a invariante repetição faz os alunos aos poucos pensarem estes casos que na maioria das vezes são mais complexos.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo buscou analisar os problemas combinatórios propostos em livros didáticos e manuais do professor dos anos finais do ensino fundamental.

Ambos os autores classificam a combinatória, como pertencente ao bloco Tratamento da Informação, conforme orientação dos PCN. A disposição das questões ao longo das coleções acontece em capítulos específicos de Tratamento da Informação, mas está presentes também em capítulos reservados ao estudo de Números e Operações, o que mostra a atualização dos autores com as pesquisas que orientam a interdisciplinaridade, oportunizando aos alunos conexões de diversas áreas da matemática, diferentes formas de pensamento matemático e vários campos do conhecimento.

Quanto a propriedade invariável repetição, a maioria das questões de combinatória não utilizam repetição, 72,41% da coleção LD-1 e 89,39% da coleção LD-2, evidenciando assim os problemas que são adequados a esta etapa de ensino. Porém em todos os volumes há questões com repetições, mesmo em quantidade pequena, preparando os alunos para situações onde será a inserção da repetição será necessária, e que virão a ser estudadas em etapas de ensino posteriores.

Em geral, as discussões existentes na coleção dos alunos são ínfimas, sendo preferido, por ambos os autores, a metodologia de apresentação do conteúdo através de exemplos resolvidos para trabalhar o conteúdo.

Nas orientações aos professores, não houve nenhuma referência das situações e/ou propriedades invariantes, indicando assim a necessidade de um complemento do manual do professor que oriente cada situação.

Ressaltamos ainda que os resultados obtidos são de duas das coleções adotadas, sendo assim fazem-se necessárias pesquisas futuras que busquem identificar como é disposto o



conteúdo nas demais coleções. Além disso, a existência das questões não garante sua utilização em sala de aula, assim sendo necessita-se de pesquisas que busquem analisar como são utilizadas as questões dos livros didáticos, assim como os conhecimentos dos professores e alunos que utilizam estes livros didáticos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, A. Praticando a Matemática. Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos – 3. ed. Renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012. – (Coleção Praticando a Matemática), 6º ao 9º ano.

BARRETO, F. L. S.; BORBA, R. E .S. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO matemática, 10., 2010, Salvador. **Anais eletrônicos...** Salvador: UFBA, 2010. Disponível em [https://www.google.com/accounts/ServiceLogin?service=writely&passive=1209600&continue=https://docs.google.com/open?id%3D0B3nOb\\_rG1DUhcE5uODc4Vk1zU0U%26urp%3Dhttp://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/producoes.htm&followup=https://docs.google.com/open?id%3D0B3nOb\\_rG1DUhcE5uODc4Vk1zU0U%26urp%3Dhttp://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/producoes.htm&ltmpl=homepage&authuser=0](https://www.google.com/accounts/ServiceLogin?service=writely&passive=1209600&continue=https://docs.google.com/open?id%3D0B3nOb_rG1DUhcE5uODc4Vk1zU0U%26urp%3Dhttp://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/producoes.htm&followup=https://docs.google.com/open?id%3D0B3nOb_rG1DUhcE5uODc4Vk1zU0U%26urp%3Dhttp://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/producoes.htm&ltmpl=homepage&authuser=0). Acesso em: 12 jan. 2014.

BARRETO, F; BORBA, R. Intervenções de Combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

BRASIL, Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF, 1998.

BRASIL. Guia de Livros Didáticos: PNLD 2014: matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013.



BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, PNLD 2014 – Coleções mais distribuídas por componente curricular. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/arquivos/category/125-guias?download=8499:colecoes-mais-distribuidas-por-componente-curricular-ensino-fundamental>. Acesso 18 de fevereiro de 2014.

CARVALHO, J. I. F.; Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2011. p. 47-59;

IMENES, Luiz Márcio. Matemática: Imenes e Lellis/ Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis. – 2º ed. – São Paulo: Moderna, 2012. 6º ao 9º ano.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ* – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009.

SANTOS, E. M. S. As representações sociais do livro didático por professores de matemática. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2013. p. 36-42.

SILVA, J. V. G. S. Análise da Abordagem de Comprimento, Perímetro e Área em Livros Didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2011. p. 48-55.

SILVA, J. J. **Análise dos Problemas Combinatórios em Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental**. 2015. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2015.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques – RDM, v. 10, n° 2, 3. pp. 133 – 170, Grenoble, 1990.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget Divisão Editorial, 1996. p. 155-189.