10.46943/VI.CONAPESC.2021.01.054

conapesc DIGITAL edition
VI CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS

CIRCUNFERÊNCIA TRIGOMÉTRICA: REFLEXÕES HISTÓRICAS E EPISTEMOLÓGICAS À LUZ DOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

RENATA GASPAR DA COSTA
Mestranda no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Maranhão - UFMA, gaspar.renata@discente.ufma.br;

ANTONIO JOSÉ DA SILVA
Professor do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Maranhão - UFMA,, antonio.silva@ufma.br;

RESUMO
Este texto tem o propósito de fomentar reflexões sobre os processos de ensino e aprendizagem da Trigonometria, em especial, a circunferência trigonométrica. A Epistemologia de Gaston Bachelard, em especial os obstáculos epistemológicos, subsidiarão a compreensão da gênese desse campo da Matemática e possíveis obstáculos epistemológicos que podem ser enfrentados pelos alunos atualmente. Uma vez elencados, apoiados ainda em Bachelard, mas agora também nos registros de representação semiótica de Raymond Duval buscou-se uma forma de superar esses obstáculos. A pesquisa ainda contempla o livro didático devido à importância e influencia desse recurso didático no processo educativo. Foi identificado um obstáculo epistemológico associado ao contexto histórico da trigonometria. Além disso propusemos uma forma de garantir a conversão entre os registros de representação da circunferência trigonométrica.

Palavras-chave: Circunferência trigonométrica, Registro de representação semiótica, Obstáculos epistemológicos.

10.46943/VI.CONAPESC.2021.01.054

INTRODUÇÃO

Investigar as possíveis razões de um possível não aprendizado em alunos e alunas configura-se como uma pesquisa com alto nível de complexidade, a serem consideradas diversas variáveis internas e externas pertencentes aos processos de ensino e aprendizagem (BROUSSEAU, 2008). Entretanto, alguns pensadores já têm apontado diversos motivos para esse fenômeno. Bachelard (1996), apesar de não ter escrito diretamente para o ensino de ciências e matemática, tem contribuído para essa discussão a partir de sua obra, em especial a sua epistemologia.

Para ele, os obstáculos epistemológicos são hábitos embutidos no conhecimento que atrapalham o processo de construção de novos conhecimentos. Ciente disso, se buscou no campo da Trigonometria os obstáculos epistemológicos desse corpo de conhecimento. A noção de obstáculo epistemológico pode ser encontrada tanto no desenvolvimento histórico do pensamento científico como na prática educacional (BACHELARD, 1996).

A pesquisa se apoia na primeira vertente apontada pelo filósofo, a pesquisa tem como problema: Quais obstáculos epistemológicos se fazem presente na gênese do desenvolvimento do conhecimento trigonométrico, especificamente na circunferência trigonométrica, e como os registros de representação semiótica podem ajudar a minimizar esses obstáculos?

A escolha por esse campo da Matemática se deu devido a sua importância para outras áreas de conhecimento e devido a sua grande aplicabilidade no cotidiano. É possível notar que desde as origens de conhecimentos que remetem à trigonometria, esses conhecimentos se relacionam com as necessidades dos povos, por exemplo, povos antigos utilizavam conhecimentos trigonométricos para navegar (orientação) ou mesmo para saber o período do dia (EVES, 2004).

Para aprofundar mais os resultados quanto aos obstáculos epistemológicos, outras pesquisas científicas foram levadas em consideração como Lima (2017), Costa (1997), Oliveira (2006) e Neto (2010).

Após elencados os obstáculos encontrados, apoiados na epistemologia de Bachelard (1996) e na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009) se buscou uma forma de superá-los. De modo geral, o objeto da pesquisa consiste em descobrir os obstáculos epistemológicos ligados à gênese da Trigonometria, especificamente da circunferência trigonométrica, e propor superá-los a partir do pensamento de Bachelard e dos registros de representação semiótica.

Cientes ainda da importância que o livro didático (LD) possui no processo de ensino-aprendizagem buscou-se analisar nesse material didático, o modo como o conteúdo é apresentado, identificando eventuais organizações de conteúdos que podem implicar no desenvolvimento de obstáculos epistemológicos.

Lopes (1993) afirma que através do estudo da história é possível perceber que as dificuldades encontradas pelos alunos podem ser os mesmos presentes no desenvolvimento histórico do conhecimento. Além disso, alega que a história retratada nos livros deve contemplar não somente os resultados científicos, mas também como se chegou a eles.

Com isso, se considerou importante não somente apresentar o desenvolvimento histórico desse conhecimento, mas verificar no LD se esse conhecimento é contemplado e como é apresentado.

Quanto ao LD, foi analisado o livro InterAção Matemática - Resolução de Problemas por meio de geometria plana e da Trigonometria. É um livro de umas das obras didáticas específicas aprovada no Plano Nacional do Livro Didático – PNLD de 2021. Por não ser possível identificar o livro mais utilizado, visto que esses livros só serão utilizados em 2022, realizou-se então um sorteio entre as coleções. Como não assumimos aqui o compromisso de avaliar coleções entre si, mas identificar os obstáculos epistemológicos ligados à gênese da Trigonometria, presentes em textos de LD e intervir por meio dos registros de representação semiótica, o sorteio foi o modo mais justo de se obter um exemplar de coleção que permitisse essa identificação.

O texto está estruturado nos seguintes tópicos: A noção de obstáculo epistemológicos e os registros de representação semiótica (Fundamentos Teóricos). Depois apresentamos uma caracterização histórica da Trigonometria. Em seguida será apresentada uma breve descrição do percurso metodológico. Mais adiante será apresentada a análise, e na sequência as considerações finais.

No próximo tópico será apresentada uma noção de obstáculos epistemológicos na visão de Gaston Bachelard e apontado qual pesquisador introduziu esse conceito no campo da Educação Matemática e Didática das Matemáticas.

A NOÇÃO DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

O filósofo francês Gaston Bachelard defende a ideia de que o desenvolvimento do conhecimento científico se dá através da superação dos obstáculos epistemológicos. Em 1938 Bachelard propagou essa noção dos obstáculos como constituinte do pensamento científico com a publicação de sua obra *A formação do espírito científico*. Entretanto, as obras de Bachelard não contemplam

10.46943/VI.CONAPESC.2021.01.054

diretamente a área de ensino de ciências. Guy Brousseau foi quem introduziu, em 1976, a noção de obstáculo epistemológico no campo da Didática da Matemática (IGLIORI, 2016).

Ao introduzir essa noção na Matemática, Brousseau distingue os obstáculos em três por meio de suas origens que são: origem ontogenética, origem didática e origem epistemológica, sendo esta última referente aos tratados por Bachelard (TRINDADE, 1996; BROUSSEAU, 2008).

Considerando que esta pesquisa se fundamenta nos obstáculos epistemológicos, é importante destacar o que trata esse termo. Bachelard os define como sendo tudo que causa estagnação, regressão, lentidões e conflitos no ato de conhecer (BACHELARD, 1996). O desenvolvimento do conhecimento científico ocorre quando, tomando consciência desses obstáculos, são superados, isto é, um obstáculo não deve ser saltado ou ignorado, mas sim buscar estratégias para superá-los. Além disso, nessa perspectiva epistemológica o erro ganha uma função positiva.

Nas palavras do filósofo, "o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização" (BACHELARD, 1996, p.17). Em outros termos, a formação do espírito científico ocorre na ruptura do conhecimento anterior[1] com o conhecimento científico.

Para superar os obstáculos epistemológicos, faz necessário discutir sobre o papel da historicização das ciências, com o objetivo de ensinar também sobre os problemas científicos, sua história, o que permitiu o desenvolvimento e progresso do conhecimento que temos hoje e não de apresentar somente os resultados científicos obtidos.

Lopes (1993) adverte para o uso da história no processo de ensino-aprendizagem, alegando que esta deve ir além do caráter ilustrativo e motivador, mostrando as lutas entre as ideias e fatos que permitiram o progresso do conhecimento.

Bachelard (1996) afirma que os obstáculos epistemológicos podem ser encontrados tanto na prática educativa como no desenvolvimento histórico de um conteúdo. Com base nisso, foram pesquisados esses obstáculos no desenvolvimento histórico do conhecimento sobre trigonometria. Para superá-los, além da historicização, buscamos sustentar as discussões também nos registros de representação semiótica apresentados a seguir.

1 O conhecimento anterior pode ser tanto o conhecimento proveniente pelo senso comum ou mesmo o conhecimento científico

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

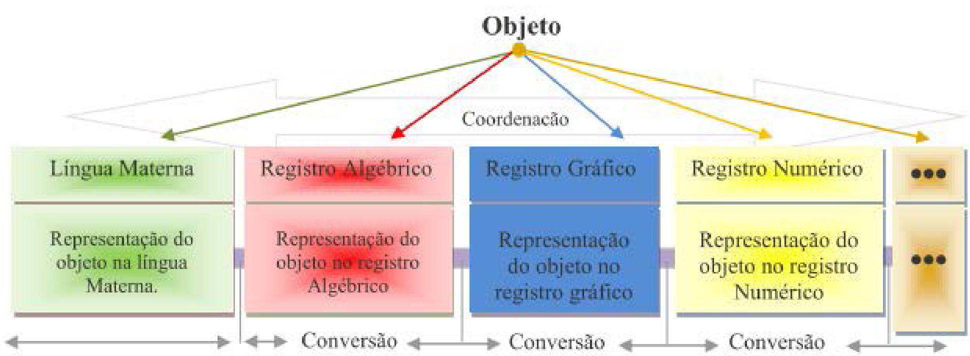
Os registros de representação semiótica representam outra teoria francesa desenvolvida pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval. Trata-se uma teoria da aprendizagem onde o foco está nas representações semióticas do objeto. Diferente de outras ciências (Biologia, Física e Química), na Matemática os objetos não são palpáveis, sendo necessário primeiro representá-los para posteriormente estudá-los. Os objetos são, então, representados através de sistemas semióticos (língua, figura, expressão simbólica, entre outros). A apreensão ou produção de uma representação semiótica define-se de ***semiose*** e a apreensão conceitual de um objeto chama-se ***noesis***, logo, afirma-se que não existe ***noesis*** sem ***semiose*** (DUVAL, 2012).

Duas operações semio-cognitvas são apresentadas nessa teoria: tratamento e conversão. A primeira, tratamento, é uma transforma interna entre registros, isto é, a representação do objeto muda, mas ainda está dentro do mesmo registro. A segunda operação, a conversão, é uma transformação externa, pois ocorre uma mudança no registro de representação inicial (DUVAL, 2012).

A hipótese fundamental de aprendizagem consiste que ao realizar a operação de conversão é necessário que ocorra a coordenação entre os registros, para isso é necessário conhecer os elementos significantes do registro inicial, que se mudados, modificam o registro final.

Henriques e Almouloud (2016) define coordenação como a habilidade do indivíduo em reconhecer um mesmo objeto em dois ou mais registros diferentes. A Figura 1 a seguir mostra o sentido da coordenação:

Figura 1 – conversão e coordenação de representações de um mesmo objeto entre registros



Fonte: Henriques e Almouloud (2016)

Outro ponto crucial é saber distinguir uma representação de seu objeto, ter acesso a uma vasta gama de registros é imprescindível para que isso não ocorra, entretanto, por si só não garante a compreensão na Matemática (DUVAL, 2009).

Consciente da teoria de Duval, a caracterização histórica sobre a trigonometria é exibida a seguir como forma de mostrar não só os obstáculos presentes nesse campo de conhecimento, mas também sua importância para a humanidade.

CONTEXTOS HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA

Na estruturação dos parágrafos que seguem, foram enfatizadas breves considerações concernentes a história do desenvolvimento da trigonometria e possíveis obstáculos epistemológicos no círculo trigonométrico. Entendemos que através de um estudo histórico é possível observar obstáculos no desenvolvimento de um conhecimento, obstáculos que podem ser revividos por alunos de hoje.

A gênese da Trigonometria varia segundo o significado atribuído a esse termo. Se considerada como uma ciência analítica sua origem remota ao século XVII, se considerada para significar a geometria acoplada à Astronomia sua origem remonta ao século II a.C (aos trabalhos de Hiparco), mas, se tido como para significar a "medidas do triângulo" então sua gênese estará entre o segundo e terceiro milênio antes de Cristo (COSTA, 2003; EVES, 2004; BOYER, 2012).

É certo que ao estudar a história desse ramo da Matemática, é possível observar a presença da Análise e da Álgebra em seu surgimento e progresso. A origem da Trigonometria pode ser encontrada nos registros de povos antigos como os egípcios, babilônicos entre outros. Seu desenvolvimento se deu a partir de necessidades práticas ligadas à Astronomia, Navegação e Agrimensura (EVES, 2004; BOYER, 2012).

Costa (2003) destaca que os egípcios apresentavam rudimentos de trigonometria na medição de pirâmides e ainda associavam a ideia à sombras projetadas, o que posteriormente os gregos vieram a chamar de gnômon (relógio de sol). Os babilônios, por sua vez, faziam uso de triângulos para o estudo de Astronomia.

Pode-se dizer que, em alguns povos é possível encontrar vestígios da Trigonometria, mostrando que seu desenvolvimento não foi linear, mas sim ocorreu conforme a necessidade. Mas foi na Grécia que a Trigonometria teve um grande desenvolvimento e passou a ser preceptora todos os demais povos (COSTA, 2003; EVES, 2004; BOYER, 2012).

Sem dúvida alguma o conceito de ângulo foi fundamental para o desenvolvimento dessa área. Em várias culturas o uso do sistema de numeração sexagesimal foi utilizado para contagem de tempo, e foi adotado como sistema de numeração padrão, a exemplo a civilização mesopotâmica dos babilônios. Do progresso contínuo do desenvolvimento da geometria a partir dos egípcios com aplicação prática e gregos com estruturações axiomáticas, vão surgindo os elementos geométricos e elementos de medida que deram origem à trigonometria da forma como a temos delimitada nos currículos escolares (D'AMBRÓSIO, 1996, EVES, 2004). Apesar do riquíssimo contexto histórico apresentado por Costa (2003), a autora não deixa explícita convergência que permitiu o progresso desse conhecimento.

Por outro lado, destaca a importância de se ter claro o conceito de ângulo e como cálculo, caso contrário, pode-se tornar um obstáculo para a aprendizagem dos conhecimentos trigonométricos. Esse pensamento corrobora com a visão de Neto (2010, p.44-45), o autor afirma que se esse conceito for visto de uma única maneira, "pode impedir uma melhor compreensão da definição de arco e ângulo trigonométrico".

As pesquisas sobre a dificuldade de aprender trigonometria ainda são escassas, o que torna difícil identificar possíveis obstáculos, mas as pesquisas já produzidas conseguem fornecer esclarecimentos sobre esse tema tão importante no campo das exatas. Tomando como foco o círculo trigonométrico, elencamos três outros obstáculos enfrentados pelos alunos no processo de aprendizagem desse conteúdo, que são:

- Círculo trigonométrico com raio igual a 1 (LIMA, 2017).
- Origem e orientação dos arcos sobre o círculo trigonométrico (NETO, 2010).
- A diversidade na representação de um mesmo objeto (COSTA, 1997).
- Ausência de coordenação entre os registros de representação (OLIVEIRA, 2006).
- Sistema fragmentado e segmentado dos livros (OLIVEIRA, 2006).

Quanto a este último obstáculo, Costa (1997) argumenta que um mesmo objeto pode ser representado através de diferentes registros de representação, o que pode vir a se tornar um obstáculo.

Se o aluno não compreende o círculo trigonométrico, logo não entenderá os gráficos das funções trigonométricas fundamentais seno e cosseno. Portanto, o obstáculo está na compreensão do círculo trigonométrico e na operação de conversão que ocorre entre os diversos registros. Adotaremos essa linha de raciocínio como obstáculo epistemológico a ser analisado no livro didático. Outro obstáculo considerado será o obstáculo conceitual de ângulo.

PERCURSO METODOLÓGICO

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram utilizados os estudos de Raymond Duval referente aos registros de representação semiótica e os obstáculos epistemológico de Gaston Bachelard. Trata-se de uma pesquisa com abordagem qualitativa e de natureza aplicada. Segundo Pradanov e Freitas (2013), a pesquisa qualitativa não requer o uso de método e técnicas estatísticas, além de que se preocupa mais com o processo do que com o produto.

Do ponto de vista dos objetivos, é considerada uma pesquisa exploratória, uma vez que se encontra na fase preliminar e busca proporcionar mais informações sobre o conteúdo investigado (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Quanto aos procedimentos é do tipo bibliográfica, uma vez que se busca analisar um livro didático do Ensino Médio. Gil (2019) define a pesquisa bibliográfica como sendo elaborada com base em material já publicado como, por exemplo, livros, revistas, teses, dissertações entre outros.

ANÁLISES E DISCUSSÕES

Para identificar os obstáculos listados anteriormente, foi analisado o livro didático (LD) InterAção Matemática – Resolução de Problemas por meio de geometria plana e da Trigonometria, cujos autores são Luciana Maria Tenuta de Freitas, Adilson Longen e Rodrigo Morozetti Blanco. Trata-se de um livro de uma das coleções aprovadas no PNLD 2021. Para não enviesar a escolha da coleção, foi realizado um sorteio entre todas as coleções aprovadas.

A análise está delimitada apenas para a parte teórica, onde, para atingir o objetivo proposto, se buscou investigar:

- Forma de introdução do conceito do objeto matemático ciclo trigonométrico;
- Se forma retomados os pré-requisitos do assunto;
- Se houve uma preocupação em relação à história e qual foi a importância dada a ela no texto;

- Se os obstáculos podem ser superados pela abordagem proposta no LD;
- Se houve preocupação em dar sentido ao conteúdo;
- Se a abordagem pode desenvolver concepções errôneas nos alunos;

A princípio, observamos que a abordagem teórico-metodológica do livro didático valoriza a importância do erro no processo de aprendizagem, pois este é uma parte integrante do processo rumo ao certo. Pensamento que corrobora com a epistemologia de Bachelard, onde seu pensamento se baseia na retificação do erro. Tomar consciência dos erros permite entender o que obstaculiza o conhecimento científico (LOPES, 1993).

O livro didático está estruturado em três unidades: 1. Geometria Plana; 2. Triângulos e geometria das transformações; 3. Funções trigonométricas. Nossa análise se limitará à terceira unidades, especificamente, o primeiro capítulo que trata sobre a circunferência trigonométrica.

Ainda sobre a estrutura do livro, Oliveira (2006) aponta que o sistema fragmentado e estruturado dos livros pode vir a ser um obstáculo. Ao observar o sumário do livro em questão se nota que as unidades conversam entre si, antes de adentrar o conteúdo de Trigonometria, os autores tiveram a preocupação de trazer a Geometria Plana. É possível que essa estrutura se deva ao desenvolvimento histórico da trigonometria visto que é possível observar a presença dos conhecimentos geométricos na mesma.

Costa (2003) afirma que o conhecimento de ângulo é importante para o desenvolvimento dos conhecimentos trigonométricos. Uma vez que um conhecimento pode se tornar um obstáculo epistemológico para outro conhecimento, buscou verificar se o conteúdo de ângulos é abordado antes do conteúdo de ciclo trigonométrico.

Se observou que o conteúdo de ângulos é abordado desde a primeira unidade do livro, Geometria Plana. Nesse primeiro momento, os autores apresentam um contexto onde é necessária a aplicação desse conhecimento, ainda é reservado uma parte para conhecer a história de como determinar a medida angular. Na unidade Funções Trigonométricas, o conceito de ângulo é retomado no tópico de circunferência trigonométrica, observamos também que o a história se faz mais presente.

Aprofundando a leitura no tópico Circunferência Trigonométrica, nota-se que em sua introdução já é falado, brevemente, das funções periódicas que provem da circunferência. Para deixar mais claro, os autores trazem fenômenos da natureza que se enquadram nessa linguagem. Posteriormente é apresentado o contexto histórico do surgimento da trigonometria, que envolve medidas da terra e da distância entre a terra e a lua, voltando, assim, à ideia de movimentos periódicos.

Mais adiante, é explicitado que outra unidade de medida de ângulo, o radiano, será também utilizada para ampliar o estudo de trigonometria e retrato a origem do radiano. Todavia, se refere apenas a uma história de caráter ilustrativo (quem descobriu, quando descobriu, quando descobriu, primeira obra que apareceu entre outros), em outras palavras, a história trazida no livro didático não apresenta o progresso do conhecimento, somente os resultados científicos.

Neto (2010) aponta que a associação dos pontos do círculo trigonométrico com os pontos do plano do cartesiano é uma dificuldade encontrada pelos alunos, entendemos como sendo um obstáculo. Ao analisar o livro, deparamo-nos com um tópico dedicado a essa associação, a partir desse ponto os autores começam a trabalhar com a circunferência trigonométrica.

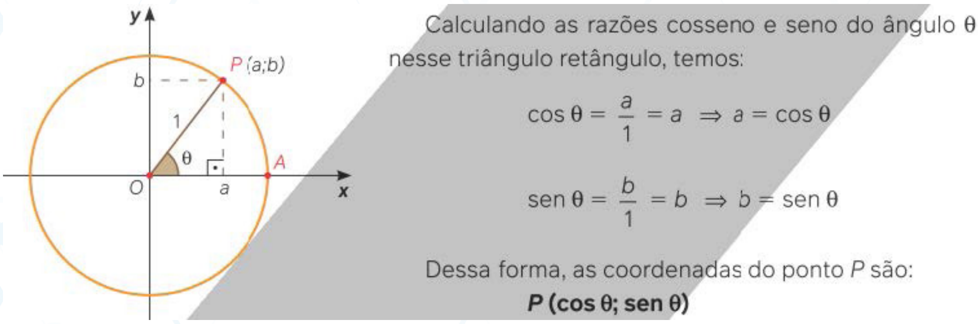
Através do registro em língua natural e registro geométrico é conceituado a circunferência trigonométrica de raio unitário. Nesse ponto concordamos com a fala de Lima (2017), onde trabalhar apenas com raio igual a 1 pode obstaculizar o desenvolvimento do pensamento, pois o aluno não foi orientado a trabalhar em outras situações, logo terá a sensação de que seus conhecimentos são inúteis, a não ser que o professor vá além do LD.

Dando continuidade, os registros geométrico, simbólico e linguístico são utilizados descrever os quadrantes da circunferência, eles reforçam um ao outro. Se acredita ter sido suficiente para auxiliar o leitor quanto a orientação dos arcos sobre a circunferência trigonométrica.

Mais tarde, é apresentado o seno e cosseno na circunferência trigonométrica. Assim como no plano cartesiano, na circunferência trigonométrica pode-se associar qualquer ponto da circunferência a um par ordenado que é determinado pelo seno e cosseno do arco correspondente. A Figura 2 a seguir mostra a forma apresentada pelo LD.

10.46943/VI.CONAPESC.2021.01.054

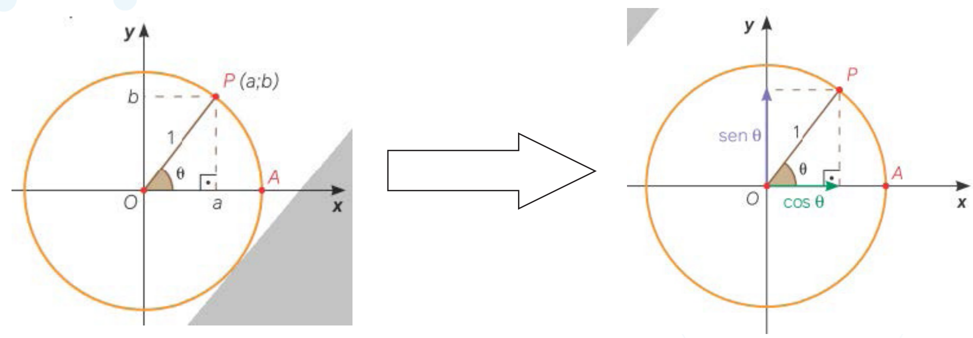
Figura 2 – Como localizar um ponto P de um registro cartesiano em um polar



Fonte: Freitas, Longen e Blanco (2020)

Por meio das coordenadas cartesianas do ponto P e do triângulo retângulo, é demonstrado as coordenadas do ponto P na forma trigonométrica. Em outras palavras, há uma mudança no registro geométrico, saindo do plano cartesiano para o plano polar. O quadro 1 a seguir mostra a mudança:

Quadro 1 – Conversão da circunferência trigonométrica



Registro de representação cartesiano | Registro de representação polar

Fonte: Adaptado de Freitas, Longen e Blanco (2020)

Entretanto, não é explicitado como fazer o processo inverso, isto é, voltar do plano geométrico para o plano cartesiano. Nas palavras de Duval (2009), não há uma coordenação entre os registros de representação. Para haver uma coordenação é preciso elencar os elementos significantes do primeiro registro, que se mudados, modifica o outro registro. Uma vez que isto não ocorra, não houve então aprendizagem. O texto do livro não deixa claro o que muda de um para outro, a não ser que isso seja apontado pelo docente durante a aula.

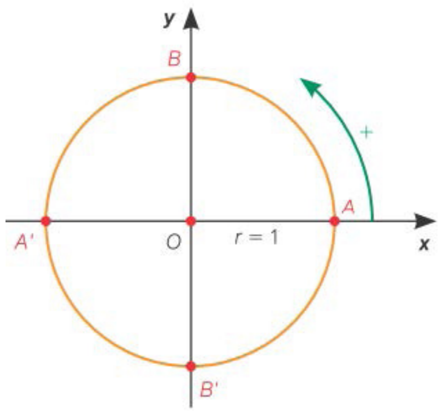
Circunferência trigonométrica e seus registros de representação

Nesta seção far-se-á uma análise semiótica da circunferência trigonométrica e suas distintas representações semióticas presentes no LD, isto inclui verificar os registros de representação semiótica, as transformações e o fenômeno da congruência inerente às suas distintas representações.

Retomando o exemplo do objeto matemático, pode-se fazer uma análise sobre a congruência entre as representações utilizadas pelo LD para defini-lo.

Quadro 2 – Definição de circunferência trigonométrica em dois registros distintos

Construímos uma circunferência de centro na origem O do sistema cartesiano ortogonal e raio unitário. Convencionamos o ponto A como origem dos arcos e o sentido anti-horário como sentido positivo de percurso dos arcos. Temos assim a circunferência trigonométrica.



Língua natural (registro de partida)

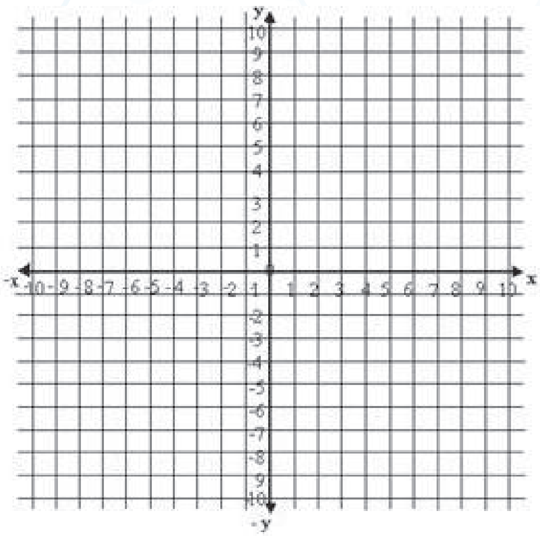
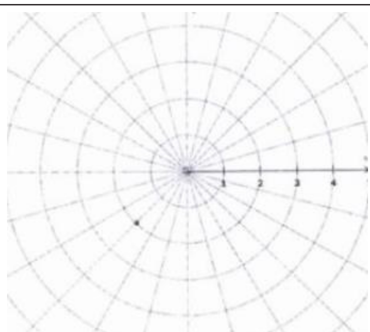
Registro geométrico (registro de chegada)

Fonte: Adaptado de Freitas, Longen e Blanco (2020)

O primeiro critério refere-se à correspondência semântica entre as unidades significativas, assim, tais unidades como: “origem O”, “sistema cartesiano ortogonal”, “raio unitário”, “sentido anti-horário” tem correlação com a circunferência trigonométrica representada. O segundo critério se refere à univocidade semântica, isto é, cada unidade significativa do registro de partida em língua natural está ligada a outra unidade significativa do registro de chegada, no caso o geométrico, como se percebe cada palavra está ligada a um símbolo. Por fim, a ordem de apreensão das unidades significativas nas duas representações é o último critério, por se tratar se uma transição do registro em língua natural para o geométrico, esse critério fica a desejar uma vez que no registro de chegada não há como se definir o começo e o fim.

O Quadro a seguir mostra as unidades significativas/visuais presentes nos registros gráficos e algébrico do objeto matemático estudado. Observe:

Quadro 3 – Registros de representação de uma circunferência trigonométrica e suas unidades significativas/visuais

Registro	Representação	Unidades significativas/visuais
Gráfico		Eixo das ordenadas (*y*) Eixo das abscissas (*x*) Ortogonal (90°) (*x*, *y*)
Gráfico		Raio unitário (*r*) Ângulo (θ) (*r* ; θ)
Algébrico	P (*x*, *y*)	Abscissa (*x*) Ordenada (*y*) P → Ponto → Par ordenado
Algébrico	P (cos θ; sin θ)	Ângulo (θ) Cosseno Seno
Algébrico	P (*r* , θ) = P (1, θ)	Raio *r* = 1 Ângulo (θ) P → Ponto → Par ordenado
Algébrico	$x^2 + y^2$	Soma dos vetores das abscissas com as ordenadas

Registro	Representação	Unidades significativas/visuais
Algébrico	$\frac{y}{x}; x \neq 0$	Quociente entre os valores da ordenada e abscissa
Algébrico	$\tan\theta$	Quociente entre seno e cosseno

Fonte: Autores

O livro didático analisado não deixa explícito que ocorre uma mudança do plano cartesiano ortogonal para o plano polar, acredita-se que isso seja devido ao fato de coordenadas polares não ser um conteúdo para o Ensino Médio. Entretanto, Fontes e Muniz (2013) apontam que os alunos desse nível têm capacidade para a introdução desse conteúdo, desde que os conhecimentos prévios sejam bem compreendidos.

O quadro nos mostra ainda que ao sair da representação cartesiana para a representação polar, a forma de representar um ponto em ambas também sofre uma modificação. No plano cartesiano o ponto é representado por P (,), já no plano polar será P (cos ; sin). Essa informação não é deixada tão clara no livro. Além disso, se nota que é apresentado apenas como transitar da reprsentação cartesiana para a representação polar, portanto, dizemos que não há conversão, pois não houve coordenação entre os registros de representação.

Mais adiante, mostraremos como realizar essa conversão, mas antes, buscando tornar mais claro quais unidades significativas da representação cartesiana implicam mudanças na representação polar, reestrutramos o quadro anterior. Assim, temos o quadro 4:

Quadro 4 – Unidades significativas/visuais da representação cartesiana e polar que implicam mudanças uma na outra

Unidades significativas/visuais		
Representação Cartesiana	$\leftrightarrow$	**Representação Polar**
x	$\leftrightarrow$	$r\cos\theta$
y	$\leftrightarrow$	$r\sin\theta$
$P(x, y)$	$\leftrightarrow$	$P(r\cos\theta; r\sin\theta) \rightarrow P(\cos\theta; \sin\theta)$
$x^2 + y^2$	$\leftrightarrow$	$r^2 = 1$
$\frac{y}{x}$	$\leftrightarrow$	$\tan\theta$

Fonte: Autores

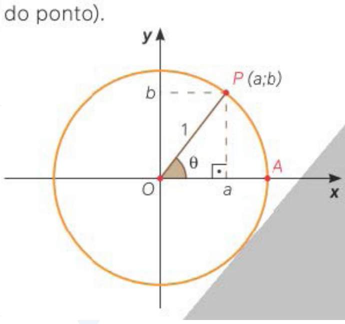
Podemos perceber as unidades significantes da representação cartesiana que sofrem modificação na representação polar, quando o aluno consegue relacionar ambas então está realizando a operação de conversão. Quanto a isso, observe a figura a seguir:

Figura 3 – Introdução da circunferência trigonomáterica segundo LD

Vamos entender melhor o motivo das definições da circunferência trigonométrica. Podemos associar a qualquer ponto da circunferência um par ordenado que é determinado pelo seno e o cosseno do arco correspondente.

Observe na circunferência trigonométrica a seguir a representação de um arco $\overset{\frown}{AP}$ correspondente a um ângulo central θ. A extremidade do arco é o ponto P de coordenadas cartesianas $(a; b)$.

Observe a seguir o triângulo retângulo de hipotenusa 1 e catetos a e b (coordenadas do ponto).



Calculando as razões cosseno e seno do ângulo θ nesse triângulo retângulo, temos:

$$\cos\theta = \frac{a}{1} = a \Rightarrow a = \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{1} = b \Rightarrow b = \operatorname{sen}\theta$$

Dessa forma, as coordenadas do ponto P são:

$P(\cos\theta; \operatorname{sen}\theta)$

Fonte: Freitas, Longen e Blanco (2020)

A figura 3 mostra que o LD analisado realiza a transição apenas no sentido da representação cartesiana para a representação polar, ficando em débito a volta (representação polar para a representação cartesiana). Essa abordagem induz o aluno a crer que existe somente um sentido de transição, o que acaba obstaculizando a compreensão do objeto matemático em sua totalidade.

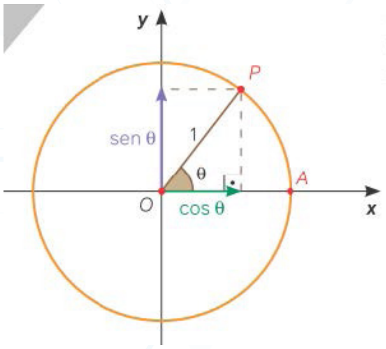
Assim, buscamos mostrar como ficaria o processo inverso, isto é, a transição da representação polar para representação cartesiana.

Na transição da representação cartesiana para a representação polar o aluno já deverá ter entendido que = cos e = sin .

Na Figura 4, geometricamente, temos que:

10.46943/VI.CONAPESC.2021.01.054

Figura 4 – Circunferência trigonométrica na representação polar



Fonte: Freitas, Longen e Blanco (2020)

O cosseno se comporta no eixo das abscissas e o seno no eixo das ordenadas. Como o raio trabalho é unitário (= 1), logo:

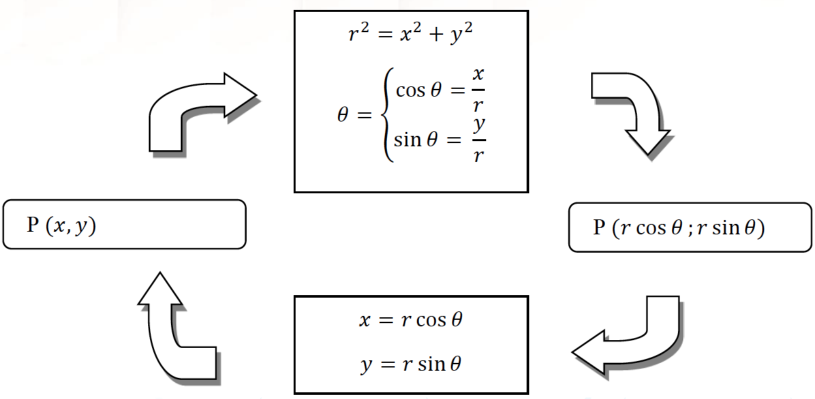
$x = r \cos \theta \rightarrow = \cos$

$y = r \sin \theta \rightarrow = \sin$

Em outras palavras, a localização do ponto P nas coordenadas cartesianas dependerá apenas do valor do ângulo .

No esquema a seguir é possível visualizar as representações juntamente com suas unidades significativas, os conhecimentos necessários na passagem destas representações.

Quadro 5 – Conversão entre as representações cartesiana e polar



Fonte: Autores

Para ir de uma representação à outra é exigido uma conversão das unidades significativas no registro de representação cartesiano em outras novas unidades significativas no registro de representação de representação polar.

A coordenação entre essas representações depende de quem será o registro de partida e quem será o registro de chegada. Quanto à análise da congruência entre as representações, Paulo (2019) aponta que esta não depende exclusivamente de uma análise semiótica, sendo necessário considerar a capacidade dos conhecimentos que os alunos possuem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa busca por obstáculos epistemológicos presente na gênese do desenvolvimento do conhecimento trigonométrico, direcionamos nosso olhar para história dessa área matemática. Nos textos analisados notamos a ausência de pesquisas que versem sobre essa temática, sendo encontrado apenas um obstáculo: ângulo. Devido a isso, buscamos pesquisas que apresentavam outros obstáculos desvinculados da história.

Dada a importância do livro didático no processo de ensino-aprendizagem, esse material didático foi adotado para observar e analisar como o é introduzido os estudos ao objeto matemático da circunferência trigonométrica, isto é, se havia uma preocupação em dar sentido ao conteúdo ou mesmo se a abordagem poderia desenvolver concepções errôneas nos alunos.

Visto que há diversas formas de representar um objeto matemático e para que haja compreensão desse objeto, se faz necessária uma conversão entre os registros de representação. Constatou-se que a ausência dessa operação cognitiva pode originar um obstáculo epistemológico. Buscando uma forma de superar esse obstáculo, adotamos o aporte teórico das representações semióticas desenvolvido por Raymond Duval.

Diante das análises realizadas, propomos uma forma de garantir que haja a conversão entre os registros de representação da circunferência trigonométrica.

Quanto à abordagem do conteúdo, é apresentada uma visão simplista do tema, induzindo o aluno a ter uma visão de uma ciência pronta e acabada. Bachelard defende o uso da história como um meio de mostrar o desenvolvimento do conhecimento científico e não apenas os resultados científicos, como é possível observar no estudo até aqui. Caso o docente se limite apenas ao uso do LD e a repeti-lo, então causará problemas para a aprendizagem do educando.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. 5 ed. Tradução de Estela dos S. Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. Blucher, 2012. 496 p.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Trad.: Camila Bogéa.1. ed. São Paulo: Ática, 2008.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. A História da Trigonometria. **Educação Matemática em Revista**, p. 60-68, 2003.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Funções seno e cosseno:** uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador. 1997. 250 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Pontifíca Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. Tradução de: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

DUVAL, Raymond; Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 13 dez. 2012. Tradução de Méricles Thadeu Moretti.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo. Editora da Unicamp, 2004. 844 p.

FONTES, Carla Antunes; MUNIZ, Rafaela dos Santos Souza. Coordenadas polares no ensino médio: contribuições para o ensino e a aprendizagem de trigonometria e números complexos. **Anais, XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2013.

FREITAS, Luciana Maria Tenuta de; LONGEN, Adilson; BLANCO, Rodrigo Morozetti. **InterAção Matemática**: a resolução de problemas por meio de geometria plana e da trigonometria. São Paulo: Editora do Brasil, 2020.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2019. 171 p.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 22, p. 465-487, 2016.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**, p. 113-142, 2016.

LIMA, Neilson Ferreira de. Obstáculo didático no ensino de trigonometria no ciclo trigonométrico. In: **VII Congresso Internacional De Ensino De Matemática-2017**. 2017.

LOPES, Alice RC. Contribuições de Gaston Bachelard ao ensino de ciências. Enseñanza de las Ciencias. **Revista de investigación y experiências didácticas**, v. 11, n. 3, p. 324-330, 1993.

NETO, José Roque Damasco. **Registros de representação semiótica e o geogebra**: um ensaio para o ensino de funções trigonométricas. 2010. 130 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

OLIVEIRA, Francisco Canindé de. **Dificuldades na construção de gráficos de funções**. 2006. 117 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

PAULO, Rafael dos Reis. **Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos**. 2019. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição. Editora Feevale, 2013.

TRINDADE, José Analio de Oliveira. **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática**. Dissertação de Mestrado. UFSC, 1996.