

DOI: 10.46943/XI.CONEDU.2025.GT16.026

## APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR NA MECÂNICA QUÂNTICA

Alberes Lopes de Lima<sup>1</sup>

### RESUMO

O objetivo do presente trabalho é demonstrar quão frutífero é o processo de ensino-aprendizagem no contexto de interdisciplinaridade. Dentre os tópicos abordados na disciplina de Álgebra Linear, a presente investigação aborda o estudo de operadores, autovalores e autovetores. Tratam-se de elementos fortemente abordados na Física e, de modo fundamental, na Mecânica Quântica. A resolução da equação de Schrödinger envolve uma equação de autovalores, resultando na obtenção de autovetores associados, os quais, quando devidamente normalizados, representam os autoestados do sistema físico. Estados quânticos são descritos por autoestados, que nada mais são do que autovetores no espaço de Hilbert. Neste trabalho, utilizando operadores invariantes lineares, encontram-se autovalores e autovetores que resultam nas soluções exatas da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico dependente do tempo de Caldirola-Kanai. Foi possível, com isso, a obtenção de resultados físicos, aplicando-se conceitos matemáticos, o que demonstra que, sempre que possível, é importante mostrar que, apesar do necessário formalismo, aspectos práticos da disciplina podem tornar mais fácil seu aprendizado. Na presente investigação, encontrou-se a solução da equação de Schrödinger em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico dependente do tempo de

1 Professor EBTT do Colégio Militar do Recife, [prof.alberes@gmail.com](mailto:prof.alberes@gmail.com);

Caldirola-Kanai. Foram também construídas soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos. Essa abordagem permite uma análise mais clara e direta das propriedades físicas do sistema, posto que os estados de pacotes gaussianos são muito comuns e que os valores esperados das quantidades físicas nesses estados são, em princípio, facilmente calculáveis.

**Palavras-chave:** Interdisciplinaridade, Oscilador harmônico, Equação de Schrödinger.

## INTRODUÇÃO

A política educacional brasileira viveu durante os anos 1960 um período de muita turbulência. Foi nesse período que intensos debates foram desdobrados visando uma reforma universitária (Romanelli, 2001). Todavia, cumpre destacar que o contexto histórico dessa década, muito conturbado e guiado por um forte viés ideológico, de certa forma guiou a discussão para uma orientação de inserção do país na esfera de controle do capital internacional (Romanelli, 2001).

A definição do modelo educacional universitário foi estabelecida pela Lei 5.540, de 28 de novembro de 1968, e o Decreto-Lei nº. 464, de 11 de fevereiro de 1969. Com relação aos cursos de graduação, ficou estabelecido que:

Os cursos de graduação compõem-se de:

1. Um *ciclo básico*, comum, para áreas afins, visando à:
  - a. recuperação de insuficiências evidenciadas pelo concurso vestibular, na formação de alunos;
  - b. orientação para a escolha da carreira;
  - c. realização de estudos básicos para ciclos ulteriores.
5. Um *ciclo profissional*, composto, por sua vez, de cursos de curta duração e de cursos de longa duração, já explícitos anteriormente (Romanelli, 2001, p.228-229).

Uma das modificações ocorridas em consequência dessa nova legislação foi com relação ao vestibular, que deixou de ser por curso e passou a ser unificado, por universidade e por região.

Os cursos de Matemática, nos anos 1940, possuíam duração de três anos e se constituíam basicamente das seguintes disciplinas: Geometria (analítica e projetiva), Cálculo vetorial, Análise Matemática, Física geral e experimental, Análise matemática e Mecânica racional. A ênfase era na formação de bachareis, cientistas, e, em segundo plano, professores. Provavelmente veio dessa época certo preconceito que os egressos da Matemática conhecem bem.

Nos anos 1960, o curso de Matemática passou a ter duração de quatro anos, no modelo 3+1. A nova grade curricular introduzia novas disciplinas, além das já em curso. As disciplinas, basicamente, englobavam Cálculo diferencial e integral, Fundamentos de matemática elementar, Desenho geométrica, Geometria analítica, Geometria descritiva, Desenho geométrico, Álgebra, Física geral e Cálculo numérico.

Observando essas informações, é fácil ver que algumas disciplina que hoje fazem parte do currículo de Matemática não estavam incluídas na formação universitária. A necessidade de formação de um ciclo básico, imposta pela reforma universitária de 1968, exigiu a elaboração de um currículo geral para a área de Ciências Exatas e da Natureza, e de um mais específico, voltado para o ciclo profissional.

No contexto dessa reforma, foi implantado também o sistema de créditos, compulsoriamente em todas as universidades federais. Para que as instituições particulares também adotassem esse modelo, segundo Frauches (2011), o Conselho Federal de Educação “obrigava (“recomendava”) as instituições particulares a implantarem o mesmo regime, nos processos de autorização ou reconhecimento de cursos”. De acordo ainda com ele (Frauches, 2011),

*Àquela época, vigorava o regime seriado anual, rígido, inflexível. A matrícula por disciplina, por semestre, veio oxigenar o ensino superior, permitindo que o aluno compusesse o seu próprio currículo, obedecidos os pré-requisitos, e controlasse o ritmo ou tempo de integralização curricular. Os mais lentos poderiam cursar duas ou três disciplinas no semestre; os mais rápidos e/ou competentes, cinco, sete, oito.*

Dentre as disciplinas que compõem a formação de um professor de Matemática, Álgebra Linear se constitui num dos pilares do conhecimento. Todavia, seu ensino, em termos como conhecemos hoje, popularizou-se em nosso país apenas nos anos 1970, quando estudantes de Ciências e Engenharia passaram a estudá-la como uma disciplina autônoma. Antes, era comum o conteúdo dessa disciplina vir inserido, de forma suplementar, por exemplo, na disciplina de Cálculo (Kaplan e Lewis (1972) ou Lang

(1972), por exemplo) ou associada à Geometria Analítica (vide Santos (1972), Carvalho (1975) ou Leithold (1977)).

As primeiras versões de livros didáticos específicos de Álgebra Linear adotados no país foram traduções de textos que apresentavam versões muito formais da disciplina. Autores como Lang (1971) e Hoffman e Kunze (1971) ganharam notoriedade com seus livros que, naquele momento, refletiam uma tendência no ensino de Álgebra Linear.

Cumprе destacar, entretanto, que os livros citados no parágrafo anterior eram recomendados para o terceiro ano de uma graduação em Matemática. Entretanto, algumas universidades no Brasil, ofereciam a disciplina de Álgebra Linear já no primeiro ano dos cursos. Ou seja, livros indicados para o ciclo profissional do curso de Matemática, que, além de exigir uma maturidade acadêmica do estudante, focavam em aspectos teóricos, esquecendo de aplicações necessárias para o aprendizado do ciclo básico, eram adotados no início do curso para estudantes de Matemática e de áreas afins, num nível que exarcebava o nível de compreensão do graduando naquele momento.

Isso levou os professores a se preocuparem em produzir um material didático mais acessível ao jovem estudante e, de certa forma, apresentando um formalismo robusto, porém num texto menos abstrato, de modo a que o aluno tivesse acesso a uma compreensão razoavelmente adequada ao seu nível de maturidade, sem levá-lo à exaustão. Nessa linha, podem ser destacados os livros de Carvalho (1974) e Gonçalves e Souza (1977).

Porém, faltava ainda a esses livros o *feeling* do professor, aquela essência epistemológica que exige uma abordagem diferente da disciplina, ou seja, menos abstrata e que mostre como podem ser utilizados os conceitos básicos. Urgia a necessidade de um texto que ao mesmo tempo em que apresentava tratamento de certo modo razoavelmente rigoroso, era capaz de responder à pergunta: qual a aplicação concreta do que foi aprendido? Afinal de contas, a Álgebra Linear está presente em aplicações na Física, na Engenharia, na

Programação Linear, dentre outras áreas e esta conexão deve ser mostrada ao estudante. Nessa proposta, surgiram experiências de vários pesquisadores em universidades brasileiras, notadamente Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler (1980), e Winterle e Steinbruch (1987) e Callioli, Domingues e Costa (1987). Esses autores, sempre que possível, ilustraram os conceitos associando-os a espaços vetoriais de duas e três dimensões, matrizes, polinômios e elementos conhecidos previamente pelos graduandos, facilitando, assim, a compreensão da disciplina.

Dentre os tópicos abordados na disciplina de Álgebra Linear, o presente aborda o estudo de operadores, autovalores e autovetores. Trata-se de elementos fortemente abordados na Física e, de modo fundamental, na Mecânica Quântica. A resolução da equação de Schrödinger, por exemplo, envolve uma equação de autovalores, utilizando um operador adequado, resultando na obtenção de autovetores associados, os quais, quando devidamente normalizados, representam os autoestados do sistema físico. Estados quânticos são descritos por autoestados, que nada mais são do que autovetores no espaço de Hilbert.

Neste trabalho, pretende-se descrever uma aplicação de conceitos aprendidos nos cursos de Álgebra Linear conectados à Física, em especial à Mecânica Quântica. O problema a ser tratado é o oscilador de Caldirola-Kanai que se caracteriza basicamente por um sistema de massa variável com o tempo.

A proposta com essa aplicação é tornar a aprendizagem de operadores, autovalores e autovetores mais significativa, no sentido de que se trata de um processo no qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo (Moreira, 2022). Uma aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação (problema do oscilador harmônico) é ancorada em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz (álgebra de operadores).

A teoria de aprendizagem significativa (conceitos e ideias) foi proposta por David Ausubel (1918-2008). Para ele, o fator que mais influencia

a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. “Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo, funcionando, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos” (Moreira, 2022, p.140).

## O PROBLEMA DO OSCILADOR DE CALDIROLA-KANAI

A teoria quântica teve sua origem no dia 14 de dezembro de 1900, quando Max Planck (1858-1947) apresentou à Sociedade Alemã de Física o conceito de quantização que resolveu o problema de radiação do corpo negro. De acordo com esse conceito, ele propôs a hipótese de que qualquer sistema físico que execute oscilações harmônicas simples pode possuir apenas valores discretos de energia, múltiplas de  $hf$ , onde  $h$  é a constante de Planck e  $f$  representa a frequência característica da oscilação.

Durante o primeiro quarto do século passado, a hipótese de Planck foi utilizada com sucesso para explicar fenômenos como o efeito fotoelétrico e o modelo atômico. Porém, exigia-se um fundamento teórico que embalsasse a teoria quântica. Ele fundamento surgiu a partir de 1925, graças aos trabalhos de Werner Heisenberg (1901-1976), Max Born (1882-1970), Pascoal Jordan (1902-1980) e Erwin Schrödinger (18878-1961).

Heisenberg era assistente de Max Born quando, ao lado deste e de Jordan, estabeleceu as bases da formulação matricial da Mecânica Quântica, em 1925. Dois anos depois, publicou seu célebre artigo acerca do Princípio da incerteza, que leva seu nome. Devido à não comutatividade de grandezas, como a posição e o momento, na teoria quântica, diferente do que acontece na Física clássica, é impossível conhecer-se ao mesmo tempo as duas. Isso criou dificuldades conceituais às concepções intrínsecas na doutrina do determinismo clássico (Rocha, 2002).

Em 1926, inspirado em analogias matemáticas, Schrödinger encontrou a tão cobrada equação de onda não relativística para o elétron e, em

seguida, deu àquela onda um caráter corpuscular, concordando com a dualidade onda-partícula, proposta alguns anos antes por Louis de Broglie (1892-1987) e comprovada experimentalmente, em 1927, independentemente, pelos físicos norte-americanos Clinton J. Davisson (1881-1958) e Laster H. Germer (1896-1971), ingleses George P. Thomson (1892-1975) e Alexander Reid<sup>2</sup>, e pelo físico russo P. S. Tartakovski (Rocha, 2002).

Em geral, o que se faz ao procurar descrever um sistema físico do ponto de vista da Mecânica Quântica, é, na formulação ondulatória, resolver a equação de Schrödinger correspondente

$$H|\Phi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi\rangle \quad (1)$$

utilizando uma forma particular para o operador Hamiltoniano  $H$ , um operador cujo observável corresponde à energia total do sistema, o qual representa a versão de operador da função Hamiltoniana da Mecânica Clássica.

Na Mecânica Quântica, observável é uma grandeza que pode ser medida. A energia de um sistema, a polarização linear de um fóton e o momento angular são exemplos de observáveis. A condição necessária de observabilidade é que o resultado da observação seja um número real. Ou seja, sendo  $O$  um operador de um observável, sua aplicação num autovetor  $|\Phi\rangle$ , resulta num autovalor  $\lambda$  real ( $O|\Phi\rangle = \lambda|\Phi\rangle$ ).

Dentre os sistemas físicos mais estudados, destaca-se o oscilador harmônico quântico. O grande interesse nesse tema deve-se ao fato de que sua equação de Schrödinger correspondente é exatamente solúvel e tem aplicações em quase todas as áreas da Física. As vibrações dos átomos nos sólidos e circuitos elétricos, vibrações elásticas em membranas e vibrações de moléculas do ar são apenas alguns exemplos de sua manifestação. Neste trabalho, estuda-se osciladores harmônicos que possuem parâmetros dependentes do tempo, no caso, a massa. Em geral, observa-se que soluções da equação de Schrödinger com Hamiltonianos dependentes

2 Reid era aluno de pós-graduação de Thomson e realizou os experimentos iniciais, mas sua morte precoce o impediu de compartilhar o reconhecimento.

explicitamente do tempo são possíveis apenas para situações particulares e, normalmente, são difíceis de serem obtidas.

Todavia, devido à importância crucial que o oscilador harmônico tem desempenhado na descrição de fenômenos físicos em diversas áreas, não se pode abster de investigar osciladores harmônicos que têm dependência com o tempo. Uma pesquisa de interesse no contexto da Mecânica Quântica foi desenvolvida, num tratamento fenomenológico, para sistemas dissipativos (considerando massa variável), sob a hipótese de forças não-conservativas, independentemente por Caldirola (1941, 1943) e Kanai (1948), que introduziram no estudo de sistemas não-conservativos um Hamiltoniano dependente do tempo para descrever um oscilador harmônico amortecido. O Hamiltoniano em questão passou a ser conhecido na literatura científica como Hamiltoniano de Caldirola-Kanai.

No entanto, esta descrição trouxe dificuldades de caráter conceitual, como, por exemplo, a violação do princípio da incerteza. Porém, Greenberg (1979) removeu tal dificuldade afirmando que o referido Hamiltoniano em verdade descreve um oscilador com frequência angular constante, mas cuja massa cresce exponencialmente com o tempo. Assim, a introdução de uma massa variável  $m(t)=m_0e^{rt}$ , na qual  $m_0$  e  $r$  representam constantes positivas e  $t$  é o tempo, remove a violação do princípio da incerteza. Esse argumento pode ser compreendido na idealização feita por Ray (1979), na qual é exibido um modelo em que um balde pendurado por um fio de massa desprezível oscilava harmonicamente sob uma chuva e a água da chuva ao cair dentro do balde aumentava sua massa. Supondo que o incremento de massa com o tempo variasse com a expressão acima, ele mostrou que o Hamiltoniano não descrevia um sistema com dissipação, mas sim um sistema de massa  $m(t)=m_0e^{rt}$ , que se move num potencial  $V(x)$ .

Lewis Jr. e Riesenfeld (1969) dirigiram sua atenção para a resolução de problemas em

mecânica quântica concernentes a osciladores harmônicos dependentes do tempo utilizando uma classe de operadores invariantes exatos.

O método idealizado por estes autores tornou-se um dos mais típicos e poderosos para encontrar estados quânticos de sistemas Hamiltonianos dependentes do tempo. Ele tem como base uma relação entre autoestados de um operador invariante e soluções da equação de Schrödinger correspondente. Assim, operadores invariantes lineares, à luz do método de invariantes dinâmicos, são utilizados para encontrar soluções exatas da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico dependente do tempo do tipo Caldirola-Kanai em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado.

## APLICAÇÃO DO MÉTODO

Um oscilador harmônico unidimensional não-forçado dependente do tempo do tipo Caldirola-Kanai pode ser descrito por um operador Hamiltoniano  $H(t)$  dado por

$$H(t) = \frac{p^2}{2m e^{\pi t}} + \frac{m e^{\pi t} \omega_0^2}{2} q^2 \quad (2)$$

no qual  $q$  e  $p$  representam, respectivamente, o operador coordenada e o operador momento canonicamente conjugados, satisfazendo a relação usual de comutação  $[p, q] = -i\hbar$ .

Uma representação em Mecânica Quântica consiste em escolher uma base  $|v_i\rangle$  (que seja um conjunto completo ortonormal) e representar o autoestado  $|\Phi\rangle$  nessa base, com os coeficientes de expansão  $c_i$ , de modo que o autoestado seja dado por:  $|\Phi\rangle = \sum_i c_i |v_i\rangle$ .

Se a base escolhida for a base dos autovetores de  $q$  (base dos autovetores do operador posição), então estamos diante de uma representação das coordenadas. Essa base será denotada por  $|q\rangle$ . Na representação das coordenadas ( $|q\rangle$ ), o operador  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ . Desse modo, o comutador

$$[p, q]\varphi = (pq - qp)\varphi = -i\hbar\varphi - i\hbar q \frac{\partial}{\partial q}\varphi + i\hbar q \frac{\partial}{\partial q}\varphi = -i\hbar\varphi$$

permite que se conclua a relação:  $[p, q] = -i\hbar$ .

A função real dependente do tempo  $M(t) = me^{rt}$  representa, na equação (02), a massa (positiva) e  $\omega_0$ , a frequência natural de oscilação. Deve-se salientar que como  $M(t) = me^{rt}$  representa uma função real do tempo, garante-se que  $H(t)$  seja Hermitiano em qualquer instante de tempo  $t$ .

Um operador  $H$  é dito ser Hermitiano ou autoadjunto se satisfizer à condição  $H = H^\dagger$ , isto é, seja igual ao seu adjunto. Uma grandeza observável é representada por um operador desse tipo. Os autovalores de operadores Hermitianos (possíveis valores das observações do operador  $H$ ) são todos sempre reais. Além disso, os autoestados correspondentes a diferentes autovalores, serão ortogonais entre si, formando, portanto um conjunto completo. Desse modo, o valor esperado para todas as funções de onda admissíveis será sempre real. Por isso, é importante que essa condição seja satisfeita pelo operador Hamiltoniano.

A evolução temporal do vetor de estado  $\Psi(q, t)$  que representa o sistema descrito pelo Hamiltoniano (02) deve obedecer à equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = H(t) \Psi(q, t) \quad (3)$$

A ideia é encontrar um operador Hermitiano não-trivial  $I(t)$  que satisfaça a equação

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] + \frac{\partial I(t)}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Se tal invariante existir e se ele não contiver operadores com derivadas temporais (isto quer dizer que, nesse caso, a equação (04) mostra que  $[I(t), H(t)] = 0$ , ou seja,  $I(t)$  e  $H(t)$  comutam entre si, o que significa que os autoestados de  $I(t)$  também serão autoestados de  $H(t)$ ), a condição acima permite construir soluções da equação de Schrödinger (03) na forma

$$\Psi_{\lambda}(q, t) = e^{i\mu_{\lambda}(t)} \Phi_{\lambda}(q, t) \quad (5)$$

na qual  $\Phi_{\lambda}(q, t)$  representa um autoestado de  $I(t)$  com autovalor independente do tempo  $\lambda$  e  $\mu_{\lambda}(t)$  é uma função de fase que pode ser calculada através da relação

$$\hbar \frac{d}{dt} \mu_{\lambda}(t) = \left\langle \Phi_{\lambda}(q, t) \left| \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right) \right| \Phi_{\lambda}(q, t) \right\rangle \quad (6)$$

Assim, seguindo o método do invariante dinâmico (Lewis Jr. ; Riesenfeld, 1969), assume-se a existência de um operador invariante linear  $I(t)$  na forma

$$I(t) = \alpha(t)q + \beta(t)p + \gamma(t) \quad (7)$$

no qual  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são funções reais dependentes do tempo a serem determinadas. O fato de exigir que tais funções sejam reais é simplesmente para garantir que o operador  $I(t)$  seja Hermitiano, garantindo, desse modo, que seus autovalores  $\lambda$  sejam todos reais. Assim, existirá um conjunto completo de autoestados do mesmo.

Substituindo a expressão dada em (07) na equação (04), tem-se que  $I(t)$  deve satisfazer a equação

$$\dot{I}(t) = \alpha(t)\dot{q} + \dot{\alpha}(t)q + \beta(t)\dot{p} + \dot{\beta}(t)p + \dot{\gamma}(t) = 0, \quad (8)$$

onde os pontos sobre as respectivas funções indicam suas derivadas com respeito ao tempo. Por outro lado, da equação (02), tem-se que<sup>3</sup>

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m e^{\pi}} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = m e^{\pi} \omega_0^2 q \end{cases} \quad (9)$$

Desse modo, substituindo as equações (09) na equação (08), percebe-se que

3 Convém destacar que as relações,  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$  e  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$  são já conhecidas do estudo de Mecânica Clássica,

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \beta(t) m e^{rt} \omega_0^2 \\ \dot{\beta}(t) = \frac{\alpha(t)}{m e^{rt}} \\ \dot{\gamma}(t) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Combinando as três equações (10), considerando-se, por conveniência que  $\gamma(t) = 0$ , chega-se à solução do problema:

$$\ddot{\beta}(t) + r \dot{\beta}(t) + \omega_0^2 \beta(t) = 0 \quad (11)$$

Do exposto acima, uma vez que seja determinada a função  $\beta(t)$  pela resolução da equação (11), a função  $\alpha(t)$  poderá ser obtida diretamente, a partir da equação (10). Portanto, conhecendo a expressão para  $\beta(t)$ , o operador invariante linear  $I(t)$  poderá ser escrito na forma

$$I(t) = \beta(t) p - m e^{rt} \beta(t) q \quad (12)$$

O passo seguinte é encontrar os autoestados de  $I(t)$ . Estes autoestados formam um conjunto completo contínuo cujos autovalores independentes do tempo  $\lambda$  constituem soluções da equação

$$I(t) |\Phi_\lambda\rangle = \lambda |\Phi_\lambda\rangle \quad (13)$$

satisfazendo a relação de ortonormalização

$$\langle \Phi_\lambda | \Phi_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda') \quad (14)$$

Substituindo a expressão do operador invariante, dada pela equação (12), na equação (13) e substituindo-se  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$  tem-se a equação de autovalores, que, após integração

$$\Phi_\lambda(q, t) = C \exp \left\{ \frac{i m e^{rt} \beta(t)}{2 \hbar \beta(t)} q^2 + \frac{i \lambda}{\hbar \beta(t)} q \right\} \quad (15)$$

com  $C$  (constante de integração) dada por

$$C = \sqrt{\frac{1}{2 \pi \hbar \beta(t)}} \quad (16)$$

Para encontrar a função de onda, é preciso ainda encontrar a expressão das funções de fase. Este procedimento é realizado calculando os elementos de matriz do lado direito da equação (05). Feito isto, chega-se à expressão para a função de fase dada a seguir

$$\mu_\lambda(t) = \frac{-f_1(t)}{2\hbar} \lambda^2 \quad (17)$$

com

$$f_1(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{m e^{\pi \beta^2(\tau)}} \quad (18)$$

Portanto, pode-se escrever as soluções da equação de Schrödinger (03) como

$$\Psi_\lambda(q, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ i \left[ \frac{-f_1}{2\hbar} \lambda^2 + \frac{q}{\hbar\beta(t)} \lambda + \frac{+m e^{\pi \beta(t)}}{2\hbar\beta(t)} q^2 \right] \right\} \quad (19)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, podem ser construídas soluções para a equação de Schrödinger (03) do tipo pacote de ondas Gaussiano. Para tal propósito, deve-se considerar uma função peso gaussiana dada pela seguinte expressão:

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{\left(\frac{-a^2}{4}\lambda^2\right)}, \quad (20)$$

na qual  $a$  é uma constante positiva. Assim, inserindo as equações (19) e (20) na solução geral da equação de Schrödinger (03), a qual é escrita como

$$\Psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \Psi_\lambda(q, t) d\lambda \quad (21)$$

Pode-se resolver a integral (21) em  $d\lambda$  e, finalmente, escrever a função de onda do pacote gaussiano como segue:

$$\Psi(q, t) = \left( \frac{2A(t)}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{iC(t)} e^{-A(t) + iB(t)} e^{-\frac{q^2}{2A(t)}} \quad (22)$$

na qual foram definidas as seguintes funções:

$$A(t) = \frac{1}{\beta^2(t) \hbar^2 a^2 \left[ 1 + \frac{4f_1^2(t)}{\hbar^2 a^4} \right]}, \quad (23)$$

$$A(t) = \frac{1}{\beta^2(t) \hbar^2 a^2 \left[ 1 + \frac{4f_1^2(t)}{\hbar^2 a^4} \right]}, \quad (24)$$

e

$$C(t) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{2f_1(t)}{\hbar a^2} \right] \quad (25)$$

Da equação (22), é possível calcular a densidade de probabilidade dependente do tempo associada a esse pacote Gaussiano. Ela é também Gaussiana para um tempo qualquer. Sua expressão é dada por

$$\rho(q, t) = |\Psi(q, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma(t)} \frac{e^{-q^2}}{\sigma^2(t)} \quad (24)$$

A abordagem utilizada neste artigo apresenta algumas vantagens quando comparada a outros métodos apresentados na literatura. Dentre estas, podemos destacar as seguintes:

- ela nos permite encontrar a função de onda diretamente, posto que o operador invariante linear é facilmente diagonalizável;
- uma vez conhecidas as soluções do oscilador harmônico de Caldirola-Kanai, a função de onda fica completamente determinada;
- a função de onda obtida permite que se obtenha soluções do tipo pacote de ondas gaussiano de maneira mais fácil do que se fossem utilizados outros métodos;

- d. essa abordagem permite uma análise mais clara e direta das propriedades físicas do sistema, uma vez que os pacotes de onda gaussianos são muito comuns e que os valores esperados das quantidades físicas nesses estados são, em princípio, facilmente calculáveis.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente investigação, encontrou-se a solução da equação de Schrödinger em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido dependente do tempo de Caldirola-Kanai. Foram também construídas soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos. Essa abordagem permite uma análise mais clara e direta das propriedades físicas do sistema, posto que os estados de pacotes gaussianos são muito comuns e que os valores esperados das quantidades físicas nesses estados são, em princípio, facilmente calculáveis.

Pretendeu-se, utilizando a conexão da Matemática com a Física, ilustrar uma aplicação de elementos importantes da Álgebra Linear, dentre eles operadores, autovalores e autovetores. Sempre que possível é importante mostrar para o estudante que, apesar do necessário formalismo, aspectos práticos da disciplina podem tornar mais fácil seu aprendizado.

Destaca-se, por exemplo, o conceito de hermiticidade. Conceituar um operador Hermitiano ou autoadjunto do ponto de vista formal requer muita abstração do estudante. Porém, mostrar exemplos de operadores que satisfazem essa condição e, melhor ainda, apresentar suas consequências torna o aprendizado mais dinâmico.

Outra observação que pode ser feita é sobre a oportunidade de estimular o estudante a aprender Matemática de uma forma mais dinâmica, sem, entretanto, deixar de utilizar o rigor adequado. Para que ocorra uma aprendizagem significativa, é importante destacar, o material a ser

aprendido deve ser relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz de maneira não arbitrária e não literal.

Deve-se ter o cuidado, porém, de não desviar o tema de estudo. Conexões como esta devem ser feitas, mas não se pode criar uma distração. A presença de aplicações reflete uma abordagem que suaviza a aprendizagem apenas formal e abstrata, mas se trata de um complemento, ou suplemento, ao conhecimento básico que deve ser adquirido pelo estudante de Matemática. De uma maneira concisa, o processo de aprendizagem significativa segue a “teoria de assimilação” proposta por Ausubel: o aprendiz recebe uma nova informação potencialmente significativa (no caso, a aplicação, por exemplo), relaciona-a com um conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva (álgebra de operadores) e, nessa interação, um conceito ou proposição potenciamente significativo é assimilado.

## REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R. ; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CALDIROLA, P. Forza non conservative nella meccanica quantistica. **Nuovo Cimento** vol. 18, 393, 1941.

CALDIROLA, P. Quantum theory of nonconservative systems. **Nuovo Cimento B** vol. 77, 241-261, 1943.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 5. ed. São Paulo: Atual, 1987.

CARVALHO, J. P. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

CARVALHO, J. P. **Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Linear: um tratamento moderno**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1975.

FRAUCHES, C. Regime acadêmico: seriado x matrícula por disciplina. Educação Superior Comentada. v. 1, n. 16, jun/jul 2011. Disponível em: <http://www.abmes>.

org.br/documentos/detalhe/687/a-educacao-superior-em-2018-comentarios-de-gustavo-fagundes

GONÇALVES, A.; SOUZA, R. M. L. **Introdução à Álgebra Linear**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

GREENBERG, D. M. A critique of the major approaches to damping in quantum theory. **Journal of Mathematics Physics**. vol. 20, 762, 1979.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.

KANAI, E. On the quantization of the dissipative systems. **Progress of Theoretical Physics**. Vol. 3, 440-442, 1948.

KAPLAN, W.; LEWIS, D. J. **Cálculo e Álgebra Linear**. Tradução coordenada por Marco Antônio Raupp. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.

LANG, S. **Álgebra Linear**. Tradução de Frederic Tsu. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

LANG, S. **Cálculo**. v. 2, Tradução de Genésio Lima dos Reis. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1970.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra, v.1. São Paulo: Harbra, 1977.

LEWIS JR., H. R.; RIESENFELD, W. B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time dependent electromagnetic field. **Journal of Mathematics Physics**. Vol. 10, 1458-1473, 1969.

MOREIRA, M. A. **Teoria de aprendizagem**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2022.

RAY, J. R. Lagrangians and systems they describe - how not to treat dissipation. **Journal of Mathematics Physics**. Vol. 47, 626-629, 1979.

ROCHA, J. F. (Ed.). **Origens e evolução das idéias da física**. Salvador: EDUFBA, 2002. ROMANELLI, O. O. **História da Educação no Brasil**. 26 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

SANTOS, N. M. **Vetores e matrizes**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1972.

WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A. **Álgebra linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.