

DOI: 10.46943/XI.CONEDU.2025.GT19.010

ENGENHARIA DIDÁTICA NO ENSINO DE PRISMAS TRIANGULARES COM REALIDADE AUMENTADA: UMA ANÁLISE PRELIMINAR E A PRIORI

Milena Carolina dos Santos Mangueira¹

Lana Priscila Souza²

Francisco Régis Vieira Alves³

Sandro César Silveira Jucá⁴

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo investigar o ensino de Geometria Espacial por meio da Realidade Aumentada (RA), explorando as fórmulas de cálculo do volume e da área da superfície de um prisma triangular. A pesquisa adota a Engenharia Didática (ED) como metodologia, concentrando-se em suas duas primeiras fases e fundamentando-se na Teoria das Situações Didáticas (TSD) para desenvolver uma proposta de ensino. Optou-se por trabalhar apenas com as fases iniciais da Engenharia Didática, uma vez que a pesquisa ainda está em andamento. Com base nesse delineamento, elaborou-se uma análise a priori, estruturando uma situação didática que aborda

- 1 Doutoranda do Curso de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - CE, milenacarolina24@gmail.com;
- 2 Doutoranda do Curso de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - CE, lanapriscilasouza@yahoo.com.br;
- 3 Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará (UFC) - CE, fregis@ifce.edu.br;
- 4 Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Ceará (UFC) - CE, sandrojuca@ifce.edu.br.

o volume e a área de um prisma, utilizando a Realidade Aumentada como ferramenta de apoio à resolução de problemas. Essa abordagem segue as etapas propostas pela Teoria das Situações Didáticas, permitindo uma futura análise a posteriori e a subsequente validação da proposta. Por fim, em uma etapa posterior, pretende-se aplicar o dispositivo didático construído em sala de aula, acompanhado pela coleta e pela análise dos dados obtidos.

Palavras-chave: Geometria Espacial, Realidade Aumentada, Engenharia Didática, Teoria das Situações Didáticas.

INTRODUÇÃO

O ensino da Geometria, particularmente no que se refere à Geometria Espacial, frequentemente apresenta desafios significativos para os estudantes, sobretudo no que diz respeito à visualização e à compreensão tridimensional de conceitos como volume e área da superfície. Buscando inovar e superar tais dificuldades, o presente estudo propõe uma investigação acerca da integração da Realidade Aumentada (RA) como ferramenta didática para o ensino da Geometria Espacial.

Neste trabalho, o foco recai sobre a exploração das fórmulas de cálculo do volume e de área de superfície do prisma triangular, utilizando a imersão e a interatividade proporcionadas pela RA para favorecer a resolução de problemas. Para isso, adota-se a Engenharia Didática (ED) como referencial metodológico, por possibilitar a concepção e a validação de sequências de ensino de modo sistemático. A proposta didática desenvolvida encontra-se solidamente fundamentada nas fases da Teoria das Situações Didáticas (TSD), as quais estabelecem as bases para um ambiente de aprendizagem em que o aluno pode construir o conhecimento de forma autônoma.

Essa articulação entre a ED e a TSD é essencial, pois a ED fornece a estrutura metodológica de experimentação, planejamento e análise, enquanto a TSD oferece o modelo teórico das interações didáticas (Brousseau, 2008; Artigue, 1988). O uso da RA nesse contexto contribui para a configuração de um milieu (meio) rico em retroações, no qual o aluno interage com objetos virtuais e regras de manipulação que favorecem o surgimento de conflitos cognitivos produtivos (Mangiante-Orsola; Perrin-Glorian; Strømskag, 2018).

Considerando-se que a pesquisa ainda está em andamento, o escopo deste artigo restringe-se às duas primeiras fases da ED: a análise preliminar e a análise a priori. Nessa etapa, detalha-se a estruturação de uma situação didática específica que integra a RA e aborda o cálculo do volume e da área do prisma triangular. A elaboração dessa análise a priori tem por

objetivo, em momento futuro, possibilitar uma análise a posteriori mais rigorosa e, conseqüentemente, a validação teórica e metodológica da proposta.

Assim sendo, o objetivo geral do artigo é investigar o ensino de Geometria Espacial por meio da RA, explorando as fórmulas e cálculo do volume e da área da superfície de um prisma triangular. De forma mais específica, o artigo apresenta, em formato de link e QR-code, a construção elaborada na Calculadora 3D do GeoGebra, a qual ilustra a situação-problema que fundamenta a proposta didática. Em etapas futuras, a pesquisa prevê a aplicação dessa situação didática em sala de aula, acompanhada da coleta e da análise dos dados obtidos, com o intuito de avaliar a eficácia da abordagem proposta.

REFERENCIAL TEÓRICO

A pesquisa busca investigar o ensino da Geometria Espacial, com ênfase nos prismas, por meio da utilização da RA como ferramenta didático-tecnológica voltada à compreensão das fórmulas de cálculo do volume e da área da superfície. Desse modo, a presente seção organiza-se em duas partes, que têm por finalidade destacar as duas temáticas principais: prismas triangulares e Realidade Aumentada.

Prismas Triangulares

Segundo Vendrame (2014), os prismas são definidos como poliedros convexos que possuem duas faces congruentes, localizadas em planos paralelos distintos. Essas faces são chamadas de bases do prisma, enquanto as demais, que são paralelogramos, são denominadas faces laterais.

A classificação dos prismas pode ser feita da seguinte maneira:

- i. **Prisma reto:** quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.
- ii. **Prisma oblíquo:** quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.
- iii. **Prisma regular:** quando, além de ser reto, suas bases são polígonos regulares. Quanto à nomenclatura, o prisma recebe o nome do polígono que forma sua base.

Por exemplo: se a base é um triângulo, trata-se de um prisma triangular; se é um quadrado, de um prisma quadrangular; se é um pentágono, de um prisma pentagonal, e assim sucessivamente.

O prisma triangular é uma figura geométrica tridimensional (um poliedro) que se destaca por sua composição: é formado por duas bases triangulares e três faces laterais retangulares. Assim como em outros prismas, suas duas bases são sempre paralelas e congruentes. A estrutura do prisma triangular é composta por 5 faces, 6 vértices e 9 arestas. Classificado como um pentaedro (poliedro de cinco faces), ele possui nove redes geométricas distintas, nas quais as arestas e os vértices são interligados pelas três faces laterais retangulares.

Nos livros de Matemática voltados ao Ensino Médio, apresentados por lezzi (2024), as fórmulas de área e volume de qualquer prisma, inclusive do prisma triangular, são expostas com base em dois princípios fundamentais:

Volume do Prisma Triangular (V)

A fórmula geral para o volume de qualquer prisma é o produto da área da base (A_b) pela altura (h).

$$V = A_b \cdot h$$

No caso do prisma triangular, a base é um triângulo. Portanto, a fórmula da A_b deve corresponder à área do triângulo da base.

- Se a base for um triângulo qualquer de base b e altura h_b :

$$A_b = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

(onde h_b representa a altura do triângulo da base).

- Se for um prisma triangular regular (isto é, com base em um triângulo equilátero de lado L):

$$A_b = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Área Total do Prisma Triangular (A_t)

A área total é a soma das áreas de todas as faces do poliedro, ou seja, a soma das áreas das duas bases com a área lateral.

$$A_t = 2A_b + A_l$$

onde:

- A_b é a área da base (área do triângulo).
- A_l é a área lateral (soma das áreas das faces laterais retangulares). A área lateral (A_l) pode ser calculada da seguinte forma:

$$A_l = P_b \cdot h$$

onde:

- P_b é o perímetro da base (soma dos três lados do triângulo da base).
- h é a altura do prisma (aresta lateral).

Não obstante, Iezzi (2024, p. 148) apresenta o princípio de Cavalieri nos seguintes termos: “Dois sólidos geométricos – nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de medidas de área iguais (superfícies equivalentes) – são sólidos geométricos de medidas de volume iguais (sólidos geométricos equivalentes)”.

A formalização dessas propriedades geométricas fundamenta o trabalho a priori da ED, por permitir prever os possíveis obstáculos epistemológicos associados à passagem do plano ao espaço (Artigue, 1988). De acordo com Brousseau (2008), a antecipação dessas dificuldades é uma condição para a construção de situações adidáticas eficazes, nas quais o aluno possa testar hipóteses e produzir conhecimento a partir de interações significativas com o milieu.

Realidade Aumentada (RA)

Conforme Tori (2022), a ideia de integrar o mundo virtual ao mundo real não é recente, tendo sido utilizada há séculos por ilusionistas. A esse respeito, Azuma (1997, p. 356), define a Realidade Aumentada (RA) como uma tecnologia que “permite ao usuário ver o mundo real, com objetos virtuais sobrepostos ou compostos com o mundo real”. Para o autor, assim como para Tori (2022), a RA constitui um sistema caracterizado por: (i) combinar elementos reais e virtuais; (ii) operar de forma interativa e em tempo real; e (iii) registrar os elementos em três dimensões (3D).

Para Tori (2022), a RA pode ser classificada de acordo com a forma de visualização: por meio de lentes, por meio de vídeo, de forma indireta ou por projeção. A visualização indireta utiliza um monitor ou uma tela de dispositivo móvel, como tablet ou smartphone, para exibir a imagem. Esse tipo de visualização pode ser realizado por meio da utilização de ambientes ou aplicativos de RA. Nessa configuração:

[...] a câmera do dispositivo móvel capta o ambiente real e o software insere elementos virtuais devidamente registrados com objetos reais. Esse registro pode ser obtido por meio de marcadores (desenhos ou figuras pintadas sobre alguma superfície plana, em geral cartões quadrados) ou pela própria imagem de parte ou do todo de um objeto. Algumas aplicações mais sofisticadas utilizam-se de sensores colocados no ambiente (Tori, 2022, p. 379).

O autor apresenta a RA móvel como uma estratégia eficaz para promover atividades lúdicas e de aprendizagem ativa, pois, diferentemente da Realidade Virtual (RV), a RA móvel não exige equipamentos específicos nem alto poder de processamento, o que possibilita que praticamente todos os alunos utilizem o recurso em seus próprios smartphones. Assim, Tori (2022) afirma que “integrar informações virtuais e reais em um mesmo ambiente é uma forma bastante eficiente de colocar o aluno diante de conteúdo ou pessoas distantes ou inacessíveis, sem retirar-lhe as percepções relativas ao ambiente real que o envolve” (p. 380).

Nesse contexto, a inserção da RA na educação pode ser concebida, por exemplo, por meio do uso de smartphones, como uma alternativa para a exibição de conteúdos 3D interativos. Tori (2022, p. 395) destaca que “qualquer que seja o caminho, a RA tem tudo para ser protagonista na educação imersiva”. É nessa perspectiva – ao empregar a RA como recurso de visualização e manipulação de sólidos geométricos, como os prismas – que se insere a presente pesquisa.

Ao ser incorporada ao milieu, a RA atua para além de uma simples ferramenta tecnológica, funcionando também como componente mediador das interações cognitivas entre o sujeito e o saber. Desse modo, ela potencializa as situações adidáticas (Brousseau, 2008) e possibilita que o professor regule o contrato didático sem comprometer a autonomia dos alunos. Essa função mediadora da tecnologia favorece o encadeamento das fases da TSD – ação, formulação, validação e institucionalização – promovendo uma aprendizagem investigativa e significativa (Sousa; Alves; Aires, 2023; 2024).

Com base no exposto, as seções seguintes apresentam a situação didática construída com base nos pressupostos da ED e da TSD, utilizando a RA como ferramenta para o ensino de prismas triangulares.

METODOLOGIA

Nesta seção, apresenta-se de forma breve, a base teórica e metodológica do presente trabalho. Para embasar a situação didática, utiliza-se como teoria de ensino a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e, como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática (ED).

Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) é um modelo teórico de ensino desenvolvido por Brousseau (1986), que se caracteriza por uma série de situações passíveis de serem observadas e aplicadas em ações de sala de aula, com o propósito de modificar um ou vários comportamentos dos estudantes. Nessa teoria, o objeto central de estudo é a situação didática, na qual é possível identificar as interações estabelecidas entre a tríade professor – aluno – saber (Almouloud, 2007).

Ainda de acordo com o autor, uma situação pode levar o aluno progredir, de modo que o saber adquirido seja o resultado de uma sequência, natural ou não, de novas perguntas e respostas, denominadas por ele de dialéticas (Brousseau, 2008). Desse modo, a TSD é organizada em quatro dialéticas ou fases, sendo estas, de acordo com Brousseau (1986; 2008):

- Ação: momento em que o aluno executa os procedimentos iniciais para resolver uma situação-problema, explorando seus conhecimentos mais imediatos, de forma predominantemente experimental e intuitiva, em vez de teórica;
- Formulação: etapa em que o aluno mobiliza seus conhecimentos prévios ou novos saberes, obtidos a partir de suas vivências escolares e sociais, para estruturar um modelo de resolução;
- Validação: fase em que o aluno deve ser capaz de empregar um conhecimento mais elaborado, de natureza mais teórica e com

maior formalização, a fim de argumentar sobre suas estratégias de solução diante de seus pares, buscando validá-las coletivamente;

- Institucionalização: o momento em que o docente reassume o controle da sala de aula, com o objetivo de formalizar os procedimentos apresentados pelos estudantes, eliminando modelos inadequados e organizando as estratégias de resolução propostas pelos discentes. Assim, o professor padroniza o saber por meio da linguagem matemática, transpondo o conhecimento do plano individual para o saber científico.

Ressalta-se, ainda, que as três primeiras fases da TSD, de acordo com Brousseau (2008), são dialéticas nas quais o aluno consegue produzir conhecimento sem a interferência direta do professor, mobilizando seus conhecimentos prévios e interagindo com o meio (milieu), sendo essa configuração denominada situação adidática. Por outro lado, em uma situação didática, segundo Almouloud (2007), o professor organiza o milieu, promovendo diferentes estratégias para que o aluno reflita sobre as situações apresentadas e construa o conhecimento. Portanto, a situação adidática é considerada parte fundamental da situação didática, por estabelecer o vínculo entre professor, aluno e saber, fortalecendo a prática docente.

Na TSD, segundo Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian e Strømskag (2018), o milieu é o sistema antagonista com o qual o estudante interage, e que pode ser um conjunto de objetos, registros e regras que geram contradições, retroações e equilíbrios até a construção do saber. Neste estudo, o milieu é constituído pelas construções do GeoGebra (janelas 2D/3D, comandos de medida/planificação), pelos enunciados, limites de intervenção docente e normas de validação entre pares. Nessa perspectiva, aprender significa adaptar-se a esse meio, regulando estratégias diante das retroações que ele produz (valores, planificações, inconsistências), até estabilizar um procedimento aceitável do ponto de vista matemático-geométrico.

Para que uma situação se torne de fato adidática, é necessário que o contrato didático esteja claramente definido e que o milieu ofereça retroações autônomas ao estudante. Segundo Almouloud (2007), cabe ao professor regular as condições do meio e as regras de interação, de modo que o aluno assuma o controle de sua própria aprendizagem. Essa perspectiva desloca o foco do ensino, passando da mera transmissão de regras para a negociação de significados, dentro de um ambiente estruturado pela tarefa, pelos instrumentos (como o GeoGebra) e pelas normas de validação compartilhadas.

Conforme destacam autores que investigam a aplicação da TSD em contextos geométricos (Mangiante-Orsola; Perrin-Glorian; Strømskag, 2018; Sousa et al., 2021; Sousa; Alves; Aires, 2023; 2024), muitas dificuldades observadas nas tarefas não decorrem de lacunas conceituais, mas das expectativas implícitas estabelecidas pelo contrato didático. Quando o professor não explicita as regras do jogo, por exemplo, permitindo ou proibindo determinadas ações, o estudante pode interpretar restrições inexistentes e, assim, limitar suas estratégias. Nessa perspectiva, esclarecer as regras (contrato didático) e devolver a responsabilidade da exploração ao aluno (devolução) não altera o conteúdo matemático da tarefa, mas restabelece o equilíbrio do contrato e favorece a aprendizagem.

Assim, a situação didática, concebida a partir das etapas da TSD, possibilita ao professor planejar e executar ações que permitam ao aluno apropriar-se de novos conhecimentos como resultado de sua interação com o meio, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo e para a consolidação de aprendizagens significativas.

Engenharia Didática (ED)

A Engenharia Didática (ED) é uma metodologia de pesquisa oriunda da Didática Francesa, cujo processo sistemático remete ao ofício do engenheiro, tendo sido desenvolvida para construir e analisar situações didáticas, dando suporte à implementação da TSD (Mangueira et al.,

2024). Artigue (1988) caracteriza a ED como um esquema experimental que se fundamenta na concepção, implementação, observação e análise de sequências de ensino, baseando-se em realizações didáticas concretas na sala de aula.

A ED é estruturada em quatro fases distintas: (i) as análises preliminares; (ii) a concepção e a análise a priori; (iii) a experimentação; e (iv) a análise a posteriori e a validação. Essas etapas são fundamentais para o desenvolvimento de situações didáticas e encontram-se resumidamente descritas no Quadro 1.

Quadro 1: Etapas da Engenharia Didática.

Etapa	Descrição
Análises preliminares	Nesta fase realiza-se um levantamento bibliográfico acerca do quadro teórico didático, isto é, uma análise epistemológica dos conteúdos e do ensino atual, levantamento dos prévios dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos e uma análise do campo onde vai situar-se a realização didática.
Concepção e análise a priori	Nesta segunda fase, o pesquisador delimita as variáveis didáticas (globais e locais) sobre as quais o ensino pode atuar, a fim de guiar a pesquisa e propor um plano de ação, bem como ocorre a preparação da sequência de ensino e a previsibilidade de possíveis comportamentos com base nas variáveis didáticas determinadas.
Experimentação	Nesta fase ocorre a aplicação das situações didáticas ou sequência didática elaboradas a priori. Firma-se também o contrato didático com os sujeitos envolvidos no processo e ocorre a coleta dos dados relativos à pesquisa.
Análise a posteriori e validação	Esta última fase apoia-se sobre todos os dados coletados durante a experimentação. A partir da análise dos dados, faz-se necessário um confronto destes com o que foi previsto anteriormente na análise a priori, para assim, fazer a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação.

Fonte: Sousa (2022, p. 52).

A relação entre ED e TSD, conforme destacam Artigue (1988) e Brousseau (2008), é de complementaridade: enquanto a ED estrutura o ciclo experimental e analítico da pesquisa didática, a TSD fornece o modelo teórico das interações que explicam os fenômenos observados. Essa integração é o que permite compreender não apenas o que o aluno faz, mas

porque determinadas estratégias emergem em função do milieu e do contrato didático estabelecidos.

Na presente pesquisa, a ED foi conduzida de forma integrada à TSD, respeitando o princípio de que a análise a priori constitui o momento de previsão das estratégias possíveis e dos obstáculos cognitivos que podem emergir no milieu (Artigue, 1988; Brousseau, 2008). Considerando que o estudo se encontra em fase de elaboração e não contemplou ainda a experimentação, foram desenvolvidas apenas as duas primeiras etapas da ED – análise preliminar e análise a priori – que correspondem à fase de concepção e planejamento da proposta de ensino.

Na análise a priori, foram antecipadas as diferentes interpretações que os estudantes poderiam adotar diante da situação-problema, desde abordagens puramente visuais, centradas na manipulação do modelo em RA, até raciocínios analíticos que recorrem às propriedades dos prismas. As variáveis didáticas consideradas incluíram: o tipo de sólido (reto ou oblíquo), as vistas disponíveis (2D e 3D), a possibilidade de planificação no GeoGebra 3D, o controle de medidas (altura, arestas da base) e o grau de intervenção docente definido pelo contrato didático.

Embora a análise a posteriori ainda não tenha sido executada, sua estrutura já foi delineada para uma etapa futura da pesquisa, visando confrontar as hipóteses levantadas na fase a priori com os dados empíricos que serão obtidos. Nessa perspectiva, o contrato didático, entendido como o conjunto de regras explícitas e implícitas que regulam o comportamento de professor e alunos (Almouloud, 2007), foi projetado com foco na devolução da responsabilidade ao estudante; ou seja, o professor não valida respostas durante as fases de ação e formulação, limitando-se a reencaminhar os alunos às retroações produzidas pelo meio digital. Esse alinhamento entre ED e TSD assegura coerência teórico-metodológica à proposta e fundamenta o planejamento da validação interna, que será efetivada por meio da futura comparação entre as análises a priori e a posteriori.

A próxima seção apresentará em detalhe o trajeto metodológico da pesquisa, fundamentado nos pressupostos desse referencial.

ANÁLISES PRELIMINARES

A análise preliminar tem como objetivo identificar os fundamentos históricos, epistemológicos e didáticos que situam o problema de pesquisa e justificam a construção de uma situação de aprendizagem com base na temática abordada (Almouloud, 2007). Nessa fase, busca-se compreender os aspectos conceituais, epistemológicos e pedagógicos envolvidos no ensino do volume e da área de superfície dos prismas triangulares, além de reconhecer as dificuldades recorrentes relacionadas a esse conteúdo no Ensino Médio.

Do ponto de vista histórico, a Geometria consolidou-se, desde Euclides (aproximadamente 325 a.C.-265 a.C), como o ramo da Matemática dedicado à compreensão das formas, medidas e relações espaciais, constituindo uma das primeiras expressões do pensamento dedutivo e lógico. Entretanto, ao longo da evolução dos currículos escolares, observou-se um processo de formalização excessiva, que reduziu o caráter exploratório e intuitivo dessa área. Autores como Kline (1976), em um período em que a Matemática Moderna ainda estava em vigor e era amplamente defendida, já destacavam que a Geometria perdia espaço nas práticas pedagógicas. Posteriormente, Pavanello (1993) evidenciou as consequências desse processo, notando que a disciplina passou a ser ensinada de forma mecânica e desvinculada da experiência sensorial, o que, em última análise, contribuiu para a diminuição da sua relevância na formação cognitiva dos estudantes.

Do ponto de vista epistemológico, o ensino da Geometria Espacial ainda se mostra fragmentado e pouco conectado a situações concretas. Muitos estudantes decoram fórmulas sem compreender suas origens geométricas, o que compromete o desenvolvimento do pensamento espacial e a capacidade de abstração (Vidigal, 2016). Conforme Brousseau (2008),

a aprendizagem ocorre quando o aluno atua em um meio que o desafia, levando-o a reorganizar seus conhecimentos a partir das retroações que recebe. Assim, é necessário que o ensino proporcione situações de investigação e validação, nas quais os alunos possam experimentar, conjecturar e argumentar matematicamente.

Sob o ponto de vista didático, a literatura evidencia que o uso de tecnologias digitais contribui para superar parte dessas dificuldades, pois amplia as possibilidades de visualização, interação e experimentação (Sousa; Alves; Aires, 2023; 2024; Tori, 2022). A RA e o GeoGebra, em particular, oferecem um milieu mais rico e responsivo, permitindo ao aluno manipular objetos geométricos em 3D, explorar propriedades e relacionar representações concretas, visuais e simbólicas.

A pesquisa parte de uma situação-problema que possibilita aos alunos investigarem as fórmulas de cálculo do volume e da área da superfície de um prisma triangular, utilizando a realidade aumentada (RA) como ferramenta de apoio.

CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

De acordo com Almouloud (2007), a etapa de concepção e análise a priori tem como objetivo antecipar o comportamento dos estudantes, prever as possíveis estratégias de resolução e identificar os obstáculos epistemológicos e didáticos (variáveis didáticas) que podem emergir na exploração da situação-problema proposta. No caso, deste trabalho, essa etapa busca estabelecer as condições didáticas que possibilitam o desenvolvimento autônomo do conhecimento, a partir de um milieu mediado pela Realidade Aumentada (RA) e pelo GeoGebra 3D.

O contexto da situação é o seguinte:

“Um arquiteto precisa projetar uma torre em forma de prisma e calcular tanto o volume quanto a área total de sua superfície, a fim de determinar a quantidade de concreto e o material de revestimento necessários. Como poderíamos ajudá-lo a obter essas medidas?”

A situação foi elaborada de modo a contextualizar o estudo das fórmulas de volume e área do prisma em um cenário significativo e próximo da realidade profissional, favorecendo o engajamento dos alunos do Ensino Médio por meio de uma aplicação prática da Geometria Espacial.

Do ponto de vista didático, prevê-se que os estudantes mobilizem conhecimentos prévios sobre de área de figuras planas, altura de sólidos geométricos, paralelismo e perpendicularidade e noção de base de um sólido. Entretanto, dificuldades recorrentes podem surgir na visualização tridimensional, como a identificação das dimensões relevantes para o cálculo do volume e a compreensão do papel da área da base na aplicação da fórmula.

Sob o enfoque teórico e cognitivo, a proposta ancora-se em uma abordagem ativa e exploratória, na qual alunos, professor e recurso tecnológico (milieu) interagem em um processo de construção conjunta do conhecimento matemático. O uso da RA e do GeoGebra têm o propósito de favorecer a visualização tridimensional do prisma, permitindo ao estudante manipular virtualmente o sólido, observar suas faces, medir dimensões e relacionar as medidas obtidas ao cálculo do volume e da área da superfície. Essa dinâmica potencializa a transição da representação concreta para a formalização simbólica, estimulando a abstração, a generalização e a argumentação matemática.

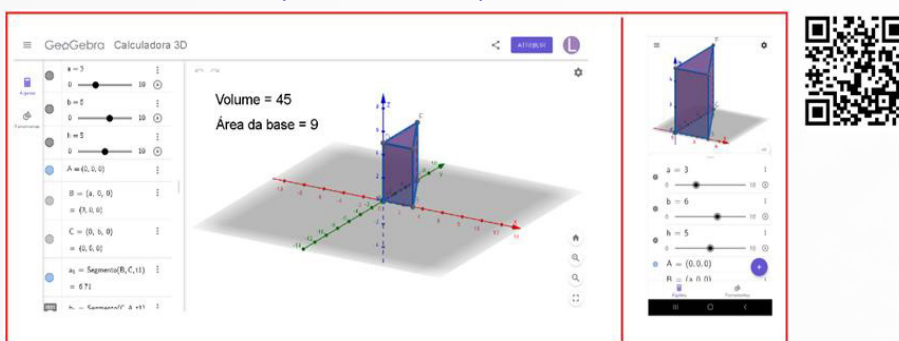
Do ponto de vista da mediação docente, o papel do(a) professor(a) é o de facilitador das interações didáticas, propondo questionamentos que orientem o raciocínio dos alunos em direção à demonstração e justificativa das fórmulas, e não apenas à sua aplicação mecânica. Como observa Brousseau (1986; 2008), a aprendizagem ocorre quando o aluno, diante de um problema significativo, reorganiza seu conhecimento para adaptar-se ao milieu, regulado pelo contrato didático. Nesse sentido, o uso combinado da RA e do GeoGebra amplia as possibilidades de retroação e de autonomia na ação, o que reforça o caráter adidático da proposta.

Artigue (1988) explica que a análise a priori, além de antecipar as ações dos alunos e fornecer base para a identificação das variáveis didáticas que

podem influenciar o desenvolvimento da situação, também mostra a previsão de como essas variáveis se articulam com as fases da TSD. Essa antecipação fundamenta o planejamento do experimento e constitui um dos critérios centrais de validação interna da Engenharia Didática, pois permite comparar previsões e resultados em etapas futuras. Assim, nos parágrafos que seguem, as etapas da TSD são descritas com os comportamentos esperados dos alunos diante da situação didática proposta e com base nas variáveis didáticas estabelecidas.

Dialética de Ação: nesta etapa, os alunos são convidados a explorar o problema em um contexto investigativo, por meio da manipulação de um modelo tridimensional de prisma, disponibilizado no aplicativo Calculadora 3D do GeoGebra, conforme indicado no QR-code da Figura 1, a seguir, e no link: <https://www.geogebra.org/3d/wawxhguk>. O objetivo é possibilitar que os estudantes visualizem e compreendam as relações geométricas envolvidas antes de formular as expressões matemáticas correspondentes. Nessa fase, a intervenção docente é mínima, limitando-se a orientar a exploração do ambiente e a garantir que as interações ocorram de forma autônoma no milieu.

Figura 1 - Vistas do modelo de Prisma Triangular Reto no aplicativo Calculadora 3D do GeoGebra (computador e smartphone) e QR-code de acesso

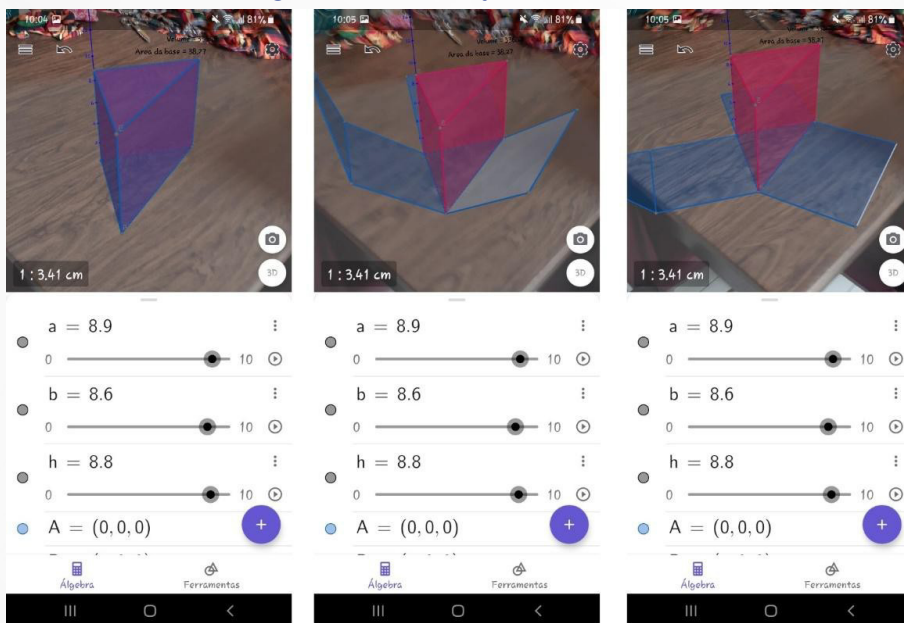


Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Inicialmente, o(a) professor(a) apresenta o problema por meio da situação contextualizada elaborada. Em seguida, os alunos acessam o modelo virtual (função RA) utilizando a câmera de um tablet ou smar-

telefone. Dessa forma, eles podem observar o sólido projetado sobre a mesa, podendo girá-lo, medir suas dimensões (altura e arestas da base) e “abrir” o modelo para visualizar sua planificação (Figura 2). O docente, enquanto facilitador, responsabiliza-se pela mediação técnica do uso do recurso, sem interferir na elaboração das estratégias de resolução pelos alunos.

Figura 2 – Planificação vista em RA



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Na sequência, o(a) professor(a) propõe perguntas orientadoras, como: “Quais são as faces que formam a base e as laterais?”, “Como a área da base se relaciona com o espaço ocupado pelo sólido?”, “Se aumentarmos a altura, o que acontece com o volume?”. Os alunos registram as respostas por meio de medidas e observações em seus cadernos ou planilhas, anotando diferentes combinações de dimensões e comparando o efeito sobre o volume e a área total. Com essas observações, eles são incentivados a formular hipóteses sobre a relação entre o volume e as dimensões. Espera-se que eles cheguem a percepções como: “O volume cresce na mesma proporção que a altura, mantendo a base fixa” e “A área

total aumenta conforme aumentamos o tamanho das faces laterais”. No papel de mediador, o(a) professor(a) circula entre os grupos, estimulando a justificativa das conclusões e promovendo conexões entre o modelo geométrico e o simbólico, conduzindo gradualmente os alunos à formalização das fórmulas. Essas observações e hipóteses marcam o início da fase de Formulação, na qual os alunos buscam generalizar as relações observadas e expressá-las matematicamente.

Nesta etapa, o papel do aluno é explorar e observar; e da tecnologia é fornecer suporte visual e manipulativo para a compreensão das relações espaciais; e o professor(a) atua como mediador, provocando questionamentos que conduzam ao surgimento de conjecturas sobre as fórmulas do prisma, em um processo dinâmico de devolução, no qual o aluno assume o controle da investigação e o professor se restringe à mediação e ao incentivo à argumentação geométrica.

Dialética de Formulação: após a exploração inicial na fase de ação, em que os estudantes manipulam o modelo tridimensional do prisma no aplicativo, inicia-se a fase de formulação, caracterizada pelo momento em que os alunos explicitam, organizam e justificam matematicamente as observações feitas durante a experimentação. O objetivo é promover a transição do raciocínio empírico e intuitivo para uma representação conceitual e formal das relações geométricas que definem o volume e a área da superfície do prisma.

Nessa etapa, o(a) professor(a) propõe que os grupos sistematizem suas conclusões, retomando o problema inicial: “Como o arquiteto poderá determinar o volume e a área total de superfície da torre em forma de prisma, considerando as dimensões da base e da altura?”. Nesse segmento, os alunos são convidados a utilizar as medidas manipuladas nos controles deslizantes do modelo em RA (valores de a , b e h) para generalizar as relações observadas. Partindo da visualização da base triangular e da variação da altura, espera-se que eles identifiquem que o volume corresponde a uma espécie de “empilhamento” de áreas iguais à da base ao

longo da altura, o que conduz à formulação da relação: $V = A_b \cdot h$, em que A_b representa a área da base triangular e h , a altura do prisma.

O(a) professor(a), por sua vez, incentiva a justificativa dessa relação por meio de questionamentos orientadores, como: “Se a base do prisma dobrar, o volume também dobra? E se a altura dobrar?” e “O que muda quando alteramos a forma da base, mantendo a mesma área?”. Essas discussões ajudam os alunos a perceberem que o volume depende diretamente da área da base e da altura do sólido, independentemente do tipo de polígono que constitui a base.

Em seguida, sugere-se que os alunos sejam levados a observar as faces laterais e o desenvolvimento planejado do prisma no ambiente digital, a fim de compreender a composição da área total da superfície (A_t). A partir da manipulação das dimensões, deve-se deduzir que: $A_t = 2A_b + A_l$, em que A_l corresponde à área lateral, obtida pela soma das áreas dos retângulos formados pelas arestas laterais e pelas dimensões das bases. Durante a formulação, os alunos podem registrar suas hipóteses, cálculos e representações gráficas em seus cadernos ou planilhas, comparando diferentes estratégias de raciocínio. A mediação docente visa garantir a coerência lógica entre as observações empíricas e as expressões matemáticas resultantes, conduzindo gradualmente à formalização das fórmulas gerais de volume e área dos prismas.

Assim, esta fase representa o momento em que os alunos dão sentido às representações simbólicas a partir da experiência imersiva, estabelecendo uma ponte entre o concreto manipulado e o abstrato matemático, condição essencial para a aprendizagem significativa dos conceitos geométricos. A sistematização das relações constitui a etapa de transição entre a formulação e a validação, na qual os alunos confrontam suas conjecturas com o modelo geométrico e com a argumentação matemática.

Dialética de Validação: após a construção e generalização das fórmulas para o cálculo do volume e da área da superfície do prisma na fase de formulação, inicia-se a fase de validação, momento em que os alunos são convidados a testar, confrontar e justificar as expressões matemá-

ticas elaboradas. O propósito é que verifiquem se suas conjecturas são consistentes com os resultados obtidos por meio da observação direta no modelo tridimensional em RA e com os cálculos realizados.

Para que isso seja efetivado, o(a) professor(a) propõe novas situações de aplicação, derivadas do problema inicial. Por exemplo: “O arquiteto decidiu que a torre terá base triangular com lados de $4m$ e $3m$, e altura de $10m$. Usando as fórmulas que vocês deduziram, qual será o volume total da estrutura? E qual será a área de superfície a ser revestida?”. Os alunos, em grupos, ajustam os controles deslizantes a , b e h no modelo do GeoGebra 3D para representar essas dimensões e confirmar visualmente o sólido. Em seguida, comparam: (a) o valor do volume calculado pela fórmula; (b) o valor estimado visualmente pelo modelo digital (observando a proporcionalidade do crescimento do prisma em relação à altura e à base); e (c) os valores obtidos em simulações com diferentes medidas, verificando se a relação entre as variáveis se mantém constante.

Esse processo leva os alunos a constatarem que, independentemente das dimensões da base, o volume é sempre proporcional à área da base multiplicada pela altura, reforçando o princípio da invariância da relação geométrica.

Para validar a área total, os alunos podem ativar a planificação do prisma (ocultando ou destacando as faces no modelo), identificando as regiões que compõem as duas bases e as três faces laterais. Assim, calculam e somam as áreas correspondentes, verificando se o resultado numérico coincide com o obtido pela expressão geral já considerada na fase anterior. Durante a atividade, o(a) professor(a) desempenha o papel de mediador avaliativo, orientando a verificação dos resultados e promovendo a reflexão por meio de questionamentos como: “O que garante que essa fórmula funciona para qualquer prisma triangular?”, “Como podemos explicar, geometricamente, por que o volume é proporcional à área da base e à altura?” e “O modelo digital confirma ou contradiz o cálculo simbólico?”.

Essas discussões favorecem a validação conceitual e simbólica das fórmulas, bem como o desenvolvimento da argumentação matemática, uma vez que os alunos precisam justificar suas conclusões com base no raciocínio lógico e na observação geométrica. Dessa forma, os alunos organizam e formalizam as observações realizadas na fase de ação, construindo relações entre as medidas manipuladas no GeoGebra e as expressões matemáticas que definem o volume e a área da superfície de um prisma. A partir da torre criada em formato de prisma triangular, os estudantes devem discutir e registrar quais dimensões são essenciais para os cálculos e como essas grandezas se relacionam.

Com base nas modificações realizadas nos controles deslizantes, eles são incentivados a identificar padrões e propor generalizações. Os alunos devem expressar o volume na forma $V = A_b \cdot h$, em que A_b representa a área da base, e a área total como a soma das áreas laterais e das duas bases.

Essa formulação surge da necessidade de representar matematicamente as observações empíricas feitas na fase anterior, consolidando a compreensão conceitual do problema. O uso da visualização 3D e da RA auxilia os alunos a relacionarem a variação das dimensões com as mudanças no volume e na área, permitindo que construam, de modo significativo, as fórmulas gerais para diferentes tipos de prismas. Essa etapa marca o momento de transição entre a experimentação e a formalização conceitual, em que o raciocínio geométrico é sistematizado em linguagem simbólica.

Dialética de Institucionalização: Neste momento, o(a) professor(a) deve retomar a situação-problema inicial e validar os resultados e as fórmulas apresentadas pelos alunos. A ênfase é colocada na formalização das expressões matemáticas de volume e área total, reafirmando que, para qualquer prisma, o volume é sempre o produto da área da base pela altura ($V = A_b \cdot h$), independentemente das dimensões da base, o que reforça o princípio da invariância da relação geométrica.

Nessa etapa, o(a) professor(a) consolida a percepção de que o uso da RA possibilitou uma verificação empírica e visual das propriedades

geométricas, enquanto as fórmulas obtidas representam uma abstração generalizada dessas relações, assegurando coerência entre concreto e abstrato, entre visualizar e demonstrar.

Espera-se, ao final, que a atividade contribua para o desenvolvimento do pensamento espacial e geométrico, integrando o uso da tecnologia ao raciocínio matemático exploratório e dedutivo. Essa fase de institucionalização encerra a análise a priori, fornecendo as bases para a análise a posteriori e para a validação futura da proposta, orientando a estruturação das etapas subsequentes da ED.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta desenvolvida possibilita que os alunos compreendam de forma significativa os conceitos de volume e área da superfície de prismas, articulando a Geometria Espacial a uma situação real e contextualizada. A simulação do problema de um arquiteto que precisa calcular medidas para a construção de uma torre pode fornecer elementos aos estudantes para que percebam a utilidade prática das fórmulas e das representações matemáticas no cotidiano profissional.

O uso do GeoGebra 3D em Realidade Aumentada (RA) favorece a visualização das dimensões e das variações geométricas, promovendo um ambiente de aprendizagem mais interativo e investigativo. As fases da Engenharia Didática (ED) mostraram-se adequadas para guiar a construção do conhecimento, pois possibilitam que os alunos transitem do nível empírico (exploração e manipulação) para o nível conceitual (formulação e validação das relações matemáticas).

Durante o processo, os estudantes podem desenvolver autonomia ao explorar propriedades, discutir hipóteses e justificar os resultados obtidos, fortalecendo a compreensão de que as fórmulas de volume e área não são meras expressões decorativas, mas representações deduzidas a partir de observações e relações geométricas.

A integração entre a ED e a TSD, considerando a gênese francófona de ambas as teorias do campo da Didática da Matemática, mostra-se adequada para estruturar a proposta e oferecer explicações teóricas sobre o processo de construção dos saberes. A coerência entre os aspectos metodológicos (ED) e os teóricos (TSD) é o que assegura a consistência de uma pesquisa didática, especialmente quando apoiada em tecnologias digitais que configuram novos “milieus” de aprendizagem. Nessa direção, o uso da RA aliado ao GeoGebra constitui uma possibilidade de meio autônomo de experimentação, capaz de favorecer a devolução da responsabilidade epistemológica ao estudante.

Como desdobramento, sugere-se a aplicação dessa situação didática em sala de aula, bem como a coleta e a análise dos dados resultantes para avaliar a eficácia da abordagem. Além disso, recomenda-se que atividades semelhantes sejam realizadas com outros sólidos geométricos, de modo a ampliar a compreensão espacial dos alunos e incentivar o uso de tecnologias digitais e imersivas no ensino de Matemática, consolidando aprendizagens que articulam teoria, prática e visualização dinâmica.

AGRADECIMENTOS

As duas primeiras autoras agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de doutorado. O terceiro autor agradece ao CNPq pela bolsa de Produtividade em Pesquisa - Nível 2. O quarto autor agradece ao CNPq pela bolsa de Produtividade em Desenvolvimento Tecnológico e Extensão Inovadora (DT) e à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) pelo suporte ao projeto da Chamada Universal UNI-0210-00533.01.00/23.

REFERÊNCIAS

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.



ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

AZUMA, R. T. A Survey of Augmented Reality. **Presence: Teleoperators and Virtual Environments**, v. 6, n. 4, p. 355-385, 1997.

BROUSSEAU, G. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques**. 1986. Tese de Doutorado. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

IEZZI, G. et al. **Identidade Saraiva**: Matemática: área de Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2024. v. 2.

KLINE, M. **O fracasso da Matemática Moderna**. Tradução de Leônidas Contijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

MANGIANTE-ORSOLA, C.; PERRIN-GLORIAN, M.-J.; STRØMSKAG, H. Theory of didactical situations as a tool to understand and develop mathematics teaching practices. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Special Issue English-French, p. 145-173, 2018.

MANGUEIRA, M. C. dos S. et al. Engenharia didática e as sequências de Fibonacci à Leonardo: um panorama histórico-evolutivo. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 10., 2024, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande: Realize Editora, 2024. p. 1-12.

PAVANELO, R. O abandono do ensino da Geometria no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, n. 01, 1993.

SOUSA, R. T. de; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. F. Categories of Intuitive Reasoning in the teaching of parabolas: A structured practice in Didactic Engineering. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 18, n. 4, em0746, 2023. DOI: <https://doi.org/10.29333/iejme/13514>

SOUSA, R. T. de; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. F. Identifying Mathematical Reasoning Levels in Initial Teacher Training: a GeoGebra-Based study about conic sections and emphasis on the case of the parabola. **Educación Matemática**, v. 36, n. 2, p. 156-171, ago. 2024. DOI: <https://doi.org/10.24844/EM3602.06>

SOUSA, R. T. de. **Categorias do raciocínio intuitivo e o ensino de parábolas em geometria analítica com aporte do software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

TORI, R. **Educação sem Distância:** Mídias e Tecnologias na Educação a Distância, no Ensino Híbrido e na Sala de Aula. 3. ed. São Paulo: Artesanato Educacional, 2022.

VENDRAME, G. V. do C. **Área da superfície e volume de prismas e cilindros.** 2014. 96 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Brasil, 2014.

VIDIGAL, Sônia Maria Pereira. **Pensamento geométrico: da representação do espaço ao espaço de significados.** 2016. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. DOI: <https://doi.org/10.11606/T.48.2016.tde-19102016-144425>